Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2016 Tereza Rýglová

Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Grafy a jejich použití

Graphs and their use

Tereza Rýglová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika jednoobor

2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Grafy a jejich použití vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze 15. 4. 2016

....

podpis

Chtěla bych poděkovat vedoucí mé bakalářské práce prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc. za cenné rady a připomínky při psaní této práce.

Dále bych chtěla poděkovat mé rodině a mému manželovi Pavlovi Rýglovi za morální podporu a trpělivost.

ANOTACE

Práce je shrnutím aplikací teorie grafů. Je rozdělena do tří částí. V první části jsou definovány pojmy teorie grafů, druhá část obsahuje historii teorie grafů a třetí část obsahuje aplikace teorie grafů. Teorie grafů bývá aplikována v nejrůznějších vědních oborech (matematika, kartografie, chemie, jazykověda, …) a také v reálných životních situacích.

KLÍČOVÁ SLOVA

teorie grafů, orientovaný a neorientovaný graf, uzel, hrana

ANNOTATION

The thesis summarizes the applications of graph theory. It is divided into three parts. The first part defines the terms of graph theory, the second part contains the history of graph theory, and the third includes the application of graph theory. Graph theory is applied in various disciplines (mathematics, cartography, chemistry, linguistics ...) and also in real life situations.

KEYWORDS

graph theory, directed and undirected graph, node, edge

Obsah

1 Úvod

Graf. Když slyšíme slovo graf, každého z nás napadne něco jiného. Nejčastěji si představíme graf funkce, se kterým se běžně setkáváme v matematice, nebo graf závislosti jedné veličiny na druhé, který se objevuje například ve fyzice, statistice a dalších vědních oborech. Další možností je např. graf znázorňující stavy a jevy v geografii, který slouží ke sledování nejrůznějších průběhů a vyvozování správných závěrů.

Grafy teorie grafů nám pomáhají orientovat se ve vztazích v reálném světě. Řada lidí si pro přehledné znázornění nějaké situace kreslí obrázky, které se skládají z bodů a čar. Body představují objekty (části celku) a čáry představují vztahy mezi těmito objekty. Je tedy zřejmé, že teorie grafů má velmi široké využití. Aplikovat ji můžeme při řešení běžných životních situací, ale také v oblastech, kde jsou grafy schované a ani si jejich použití neuvědomujeme. Takovým příkladem je informatika, elektrotechnika apod.

Hlavním úkolem mé práce je shrnout co nejvíce aplikací teorie grafů. Nejprve jsem v první kapitole definovala pojmy teorie grafů, ve druhé jsem se zabývala historií a ve třetí kapitole jsem se zaměřila na aplikace. Vybrala jsem především reálné aplikace, které člověk využívá nebo se s nimi setkává v běžném životě.

Při zahájení mé práce bylo zřejmé, že bude třeba vytvořit celou řadu názorných obrázků. Dlouho jsem přemýšlela, který software bude nejvhodnější, a nakonec jsem zvolila GeoGebru. Velmi dobře se v ní kombinují potřebné geometrické útvary s textem, který je potřebný obzvláště u obrázků v aplikační části. Některé obrázky jsem si vymýšlela sama, jiné jsou překreslené v GeoGebře ze zdroje uvedeného u každé kapitoly.

Pro pojem vrchol se v řadě publikací používá slovo uzel, které i já používám v celé své práci. Protože definice jsou doslovnými citacemi, ponechávám v nich terminologii vrchol/uzel podle toho, co je uvedeno v originálu.

2 Základní pojmy

V této kapitole základních pojmů nejprve definuji pojem graf a následně vysvětluji důležité základní pojmy pro zkoumání grafů a jejich aplikačních úloh. Hlavním zdrojem informací této kapitoly jsou knihy (Matoušek, Nešetřil, 2009) a (Demel, 2002). Dalším zdrojem je kniha (Sedláček, 1981).

Mnoho situací nejen v matematice, ale i v dalších vědních oborech a praktických situacích lze znázornit pomocí schématu, které se skládá převážně ze dvou objektů … (konečné) množiny bodů a spojnic mezi některými dvojicemi bodů. Pod jednou takovou situací si můžeme představit křižovatky (body) a ulice mezi nimi (spojnice). V matematice tomuto schématu odpovídá pojem graf.

Definice grafu

„Graf *G* je uspořádaná dvojice *(V, E)*, kde *V* je nějaká neprázdná množina a *E* je množina dvoubodových podmnožin množiny *V*. Prvky množiny *V* se jmenují vrcholy grafu *G* a prvky množiny *E* hrany grafu *G*." (Matoušek, Nešetřil, 2009, s. 111, 112)

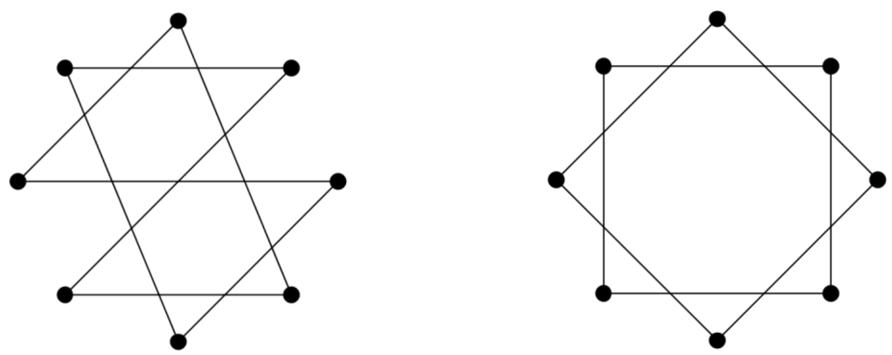
Pozn.: Písmena V a E pocházejí z anglických termínů: vrchol = vertex, hrana = edge

Graf *G* je konečný, pokud je množina uzlů konečná. V případě, že je množina uzlů nekonečná, graf *G* se nazývá nekonečný. Jestliže graf *G* dokážeme nakreslit takovým způsobem, že uzly jsou body roviny a hrany nemají žádný společný vnitřní bod, nazývá se rovinný.

Uzly, které jsou spojeny hranou, nazýváme sousední a jsou incidentní s touto hranou. Hrana, která je incidentní pouze s jedním uzlem, se nazývá smyčka. Počet incidentních hran s jedním uzlem udává stupeň tohoto uzlu. Pokud má uzel stupeň nula, tzn., že není incidentní s žádnou hranou, říkáme, že je izolovaný.

Konečná posloupnost na sebe navazujících uzlů a hran grafu *G* se nazývá **sled**. Jeho délka odpovídá počtu uzlů sledu zmenšenému o jeden. Sled, který začíná i končí v jednom a tom samém uzlu, nazýváme uzavřený. Otevřený sled je naopak takový, který v jednom uzlu začíná a v jiném končí. Sledu, ve kterém se každá hrana vyskytuje nejvýše jednou, říkáme

tah. Speciálním tahem je **uzavřený eulerovský tah**, který zahrnuje všechny hrany grafu právě jednou a každý uzel alespoň jednou. Graf, který obsahuje minimálně jeden uzavřený eulerovský tah, nazýváme **eulerovský**. Sled obsahující každý uzel nejvýše jednou nazýváme **cesta**. Za povšimnutí stojí, že každá cesta je zároveň tahem i sledem. Ale tah, který je vždy sledem, není pokaždé cestou. Pokud pro libovolné dva uzly grafu *G* existuje sled, jedná se o **souvislý graf**. V případě, že graf souvislý není, můžeme ho rozdělit na souvislé podgrafy, které se nazývají **komponenty**. Graf *G* tvoří sjednocení jeho komponent. Příklad souvislého a nesouvislého je na obrázku 1. Pokud jsou dvě komponenty spojeny jednou jedinou hranou, nazývá se tato hrana **most**. V případě, že tuto spojnici tvoří uzel, označuje se jako artikulace.

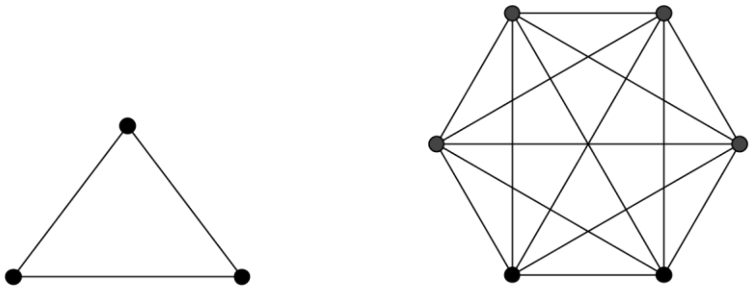


Obr. 1: Souvislý graf a nesouvislý graf

Důležité grafy

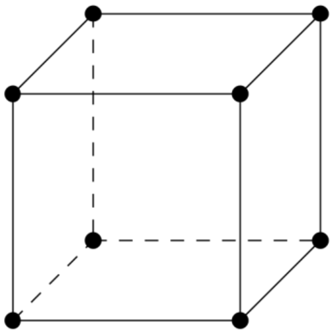
Grafy, které se v teorii grafů vyskytují velmi často, získali své speciální názvy a označení:

Úplný graf $\boldsymbol{K_n}$ (kde $n \geq 1$) je takový graf, jehož všechny uzly jsou navzájem propojeny hranami. Příklady úplných grafů K_3 a K_6 jsou na obrázku 2.



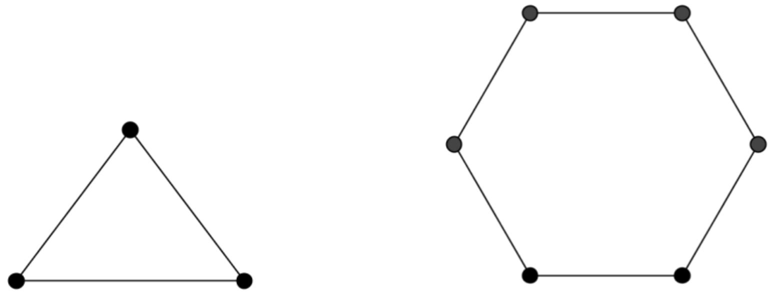
Obr. 2: Úplné grafy K_3 a K_6

<u>Pravidelný graf stupně *n*</u> je takový graf, ve kterém má každý uzel stupeň n. Příklad úplného grafu stupně 3 je na obrázku 3.



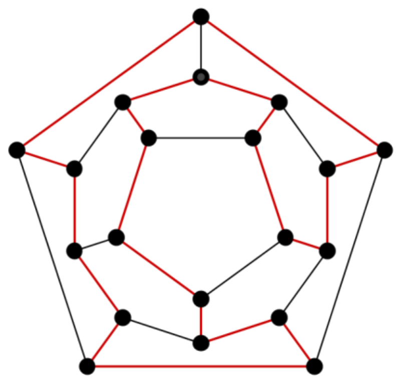
Obr. 3: Pravidelný graf stupně 3

<u>Kružnice</u> C_n (kde $n \geq 3$) je takový graf, který je konečný, pravidelný, souvislý a jehož všechny uzly jsou stupně dva. Počet uzlů, které kružnice obsahuje, se nazývá **délka kružnice**. Je zřejmé, že nejkratší možná kružnice má délku 3. Takováto kružnice může být někdy též nazvána trojúhelníkem, kružnice délky 4 čtyřúhelníkem atd. Příklad kružnice délky 3 a 6 jsou na obrázku 4.



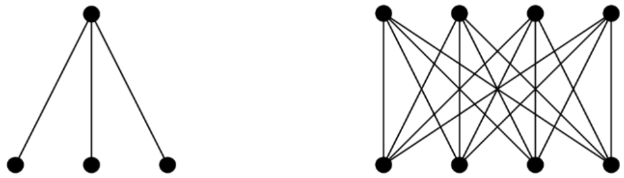
Obr. 4: Kružnice C_3 a C_6

Speciální případem kružnice je **kružnice hamiltonovská** (na obrázku 5 vyznačena červeně), která obsahuje všechny uzly grafu s tím, že každým uzlem projdeme právě jednou.



Obr. 5: Hamiltonovská kružnice

Úplný bipartitní graf $\boldsymbol{K_{n,m}}$ (kde $n, m \geq 1$) je graf, který se skládá ze dvou částí a to tak, že všechny uzly z první části jsou spojeny hranou se všemi uzly z části druhé. Písmeno *n* udává počet uzlů první části grafu, písmeno *m* udává počet uzlů druhé části grafu. Příklady úplných bipartitních grafů $K_{3,1}$ a $K_{4,4}$ jsou na obrázku 6.



Obr. 6: Úplný bipartitní graf $K_{3,1}$ a $K_{4,4}$

<u>Diskrétní graf</u>, je graf, který nemá žádnou hranu. Skládá se tedy pouze z uzlů.

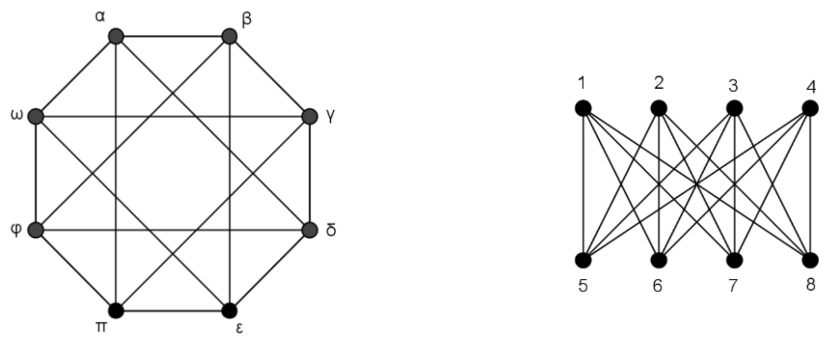
Definice

„Dva grafy G = (V, E) a G' = (V', E') nazveme isomorfní, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení f: $V \rightarrow V'$ tak, že platí

$$\{x, y\} \in E \text{ právě když } \{f(x), f(y)\} \in E'.\text{“}$$

(Matoušek, Nešetřil, 2009, s. 114)

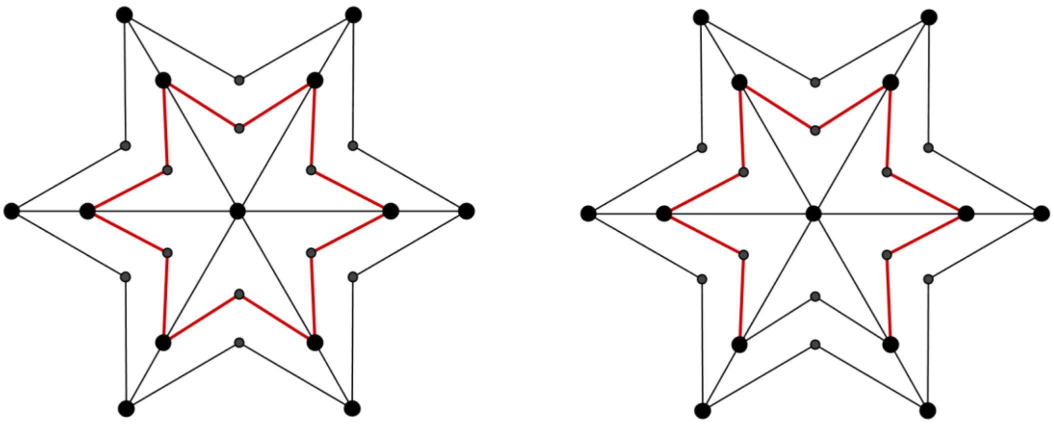
Dva grafy považujeme za **isomorfní** („stejné“), pokud se liší pouze označením uzlů a hran, případně i způsobem zakreslení.



Obr. 7: Isomorfní grafy

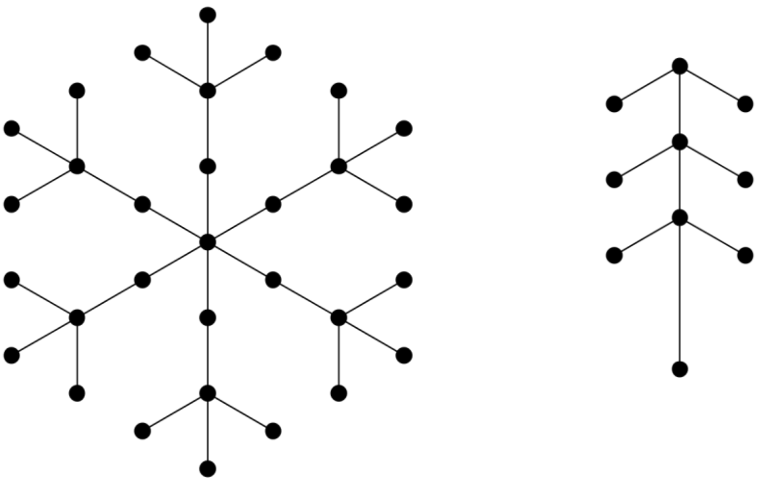
Na obrázku 7 vidíme dva isomorfní grafy. Odpovídají si uzly $\alpha - 1$, $\beta - 5$, $\gamma - 2$, $\delta - 6$, $\varepsilon - 3$, $\pi - 7$, $\varphi - 4$, $\omega - 8$.

Pokud z grafu G umažeme některé uzly a všechny hrany, které z těchto uzlů vycházejí, dostaneme **indukovaný podgraf** grafu G. V případě, že odstraníme navíc ještě nějakou další hranu bez jejích koncových uzlů, získáme **podgraf** grafu G. Na obrázku 8 jsou oba dva zvýrazněny červenou barvou.



Obr. 8: Indukovaný podgraf a podgraf

Souvislý graf, který neobsahuje kružnici, nazýváme **strom**. Příklady stromů jsou na obrázku 9. Strom, který má právě dva uzly 1. stupně, bývá občas označován jako **had**. Strom, který má všechny uzly kromě jednoho stupně 1, bývá někdy označován jako **hvězda**.



Obr. 9: Příklady stromů

Věta, která následuje, je shrnutím základních poznatků o stromech.

„Věta (Charakterizace stromů).

Pro graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *G* je strom.

(ii) (jednoznačnost cesty)
Pro každé dva vrcholy $x, y \in V$ existuje právě jediná cesta z *x* do y.

(iii) (minimální souvislost)
Graf *G* je souvislý, a vynecháním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf.

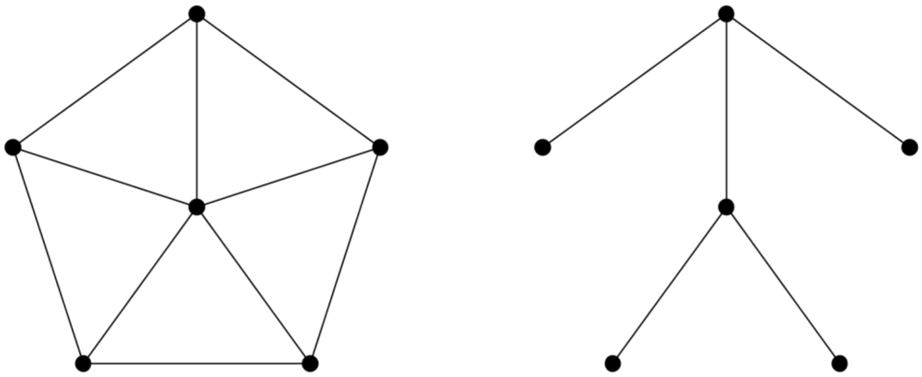
(iv) (maximální graf bez kružnic)
Graf *G* neobsahuje kružnici, a každý graf vzniklý z *G* přidáním hrany již kružnici obsahuje.

(v) (Eulerův vzorec)
G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.“ (Matoušek, Nešetřil, 2009, s. 161, 162)

Důkaz věty nalezneme v (Matoušek, Nešetřil, 2009) na stranách 162, 163.

Graf, jehož hranám jsou přiřazeny nějaké číselné hodnoty, nazýváme hranově ohodnocený graf. S tím se poměrně často můžeme setkat v praktických aplikacích. Například ohodnocené hrany mohou představovat vzdálenost mezi městy při hledání nejkratší cesty pro rozvoz nějakého zboží. Druhou možností ohodnocení grafu je ohodnocení uzlové, kdy jsou číselné hodnoty přiřazeny uzlům.

Podgrafu grafu *G*, který je strom a zahrnuje všechny uzly, říkáme **kostra** grafu *G*. Na obrázku 10. vidíme graf a jednu jeho možnou kostru. U grafů s ohodnocenými hranami můžeme hledat tzv. **minimální kostru**. Je to kostra, jejíž součet ohodnocení hran je minimální.



Obr. 10: Graf a jedna z jeho možných koster

Orientované grafy

Definice

„Orientovaný graf G je dvojice *(V, E),* kde *E* je podmnožina kartézského součinu $V \times V$. Prvky *E* nazýváme šipky (nebo orientované hrany). Tedy šipka *e* má tvar *(x, y)*. Říkáme, že tato šipka vychází z *x* a končí v *y*." (Matoušek, Nešetřil, 2009, s. 143)

U orientovaných hran musíme u jejich názvů dávat pozor na pořadí uzlů. Hrany *(x, y)* a *(y, x)* jsou odlišné (na rozdíl od kapitoly neorientovaných grafů). Pokud v orientovaném grafu existuje hrana *(x, y)* a neexistuje hrana *(y, x)*, potom se hrana *(x, y)* nazývá **jednoduchá**.

Neorientovaný graf, který vznikne tím, že u orientovaného grafu „zrušíme" orientaci jeho hran, se nazývá **symetrizace orientovaného grafu**. **Orientace grafu *G*** je orientovaný graf, který vznikne náhodným doplněním orientace hranám. **Symetrická orientace grafu *G*** vznikne z neorientovaného grafu při nahrazení každé neorientované hrany dvěma opačně orientovanými hranami a každé neorientované smyčky smyčkou orientovanou. Symetrický graf je takový orientovaný graf, ve kterém pro každou dvojici uzlů platí, že počet hran z prvního uzlu do druhého je shodný s počtem hran z druhého uzlu do prvního.

Analogicky jako u neorientovaných grafů, objevují se i zde pojmy jako orientovaný tah, orientovaný sled, orientovaná cesta, orientovaná kružnice apod. Orientovaný sled má oproti neorientovanému navíc podmínku, že všechny hrany musí být orientovány „vpřed

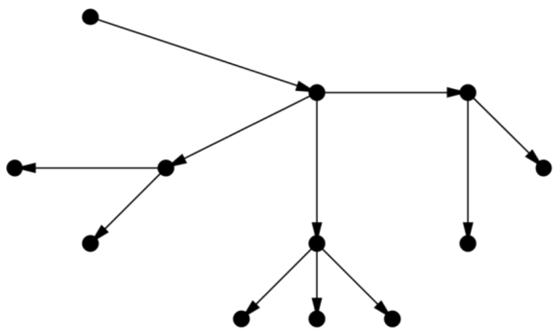
ve směru sledu“. Pokud existuje orientovaný sled z jednoho uzlu do druhého, říkáme, že druhý uzel je **orientovaně dostupný** z prvního uzlu.
Orientovaná kružnice se nazývá **cyklus**.
Eulerovský orientovaný graf je takový, který obsahuje uzavřený orientovaný tah obsahující právě jednou každou hranu a minimálně jednou každý uzel.

Platí věta: „Nechť graf G je souvislý. Pak v grafu G existuje orientovaný uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když pro každý vrchol v platí $d^+(v) = d^-(v)$.“ (Demel, 2002, s. 180)

Symbol $d^+(v)$ značí počet hran vycházejících z uzlu v.
Symbol $d^-(v)$ značí počet hran vcházejících do uzlu v.

Důkaz věty nalezneme v knize (Demel, 2002) na straně 180.

Velmi užitečným a často používaným orientovaným grafem je tzv. **kořenový strom**, který je na obrázku 11. Je to orientovaný graf, který má jeden speciální uzel, tzv. **kořen**, do kterého nesměřuje žádná hrana. Do všech ostatních uzlů směřuje právě jedna hrana a všechny uzly jsou od kořene orientovaně dostupné.



Obr. 11: Kořenový strom

U kořenových stromů se občas vyskytují výjimečné „přírodopisně rodinné“ názvy. Směřuje-li hrana z uzlu *x* do uzlu *y*, potom se uzel *x* nazývá **otcem** uzlu *y* a uzel *y* **synem** uzlu *x*. Občas se uzlům, které mají stejného otce, říká **bratři**. Můžeme se zde setkat také s výrazem vnuk, dědeček apod. Uzel, ze kterého nevychází žádná hrana, resp. otec, který nemá syna, se označuje slovem **list**. Z obrázku 11 je zřejmé, že každý uzel v kořenovém stromu má právě jednoho otce. Výjimkou je pouze kořen, který otce nemá.

Grafy neznázorňujeme pouze pomocí bodů a úseček, resp. uzlů a hran, ale můžeme využít také další matematické aparáty. Jedním z nich je matice. Ta je vhodná např. pro zadání grafu počítači. Základní a nejběžnější je tzv. matice sousednosti grafu.

Definice

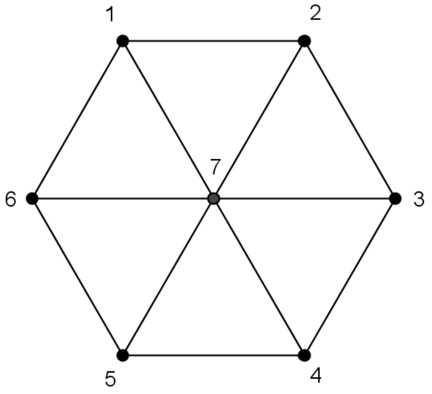
„Nechť $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy. Označme vrcholy $v_1, \ldots, v_n$ (v nějakém libovolném pořadí). Matice sousednosti grafu G je čtvercová matice $A_G = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ definovaná předpisem

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak.} \text{"} \end{cases}$$

(Matoušek, Nešetřil, 2009, s. 121)

Na obrázku 12 vidíme matici neorientovaného grafu. Je to symetrická čtvercová matice, ve které se vyskytují pouze 1 a 0. Na hlavní diagonále najdeme zpravidla samé 0, ale např. u grafů binárních relací je tomu jinak. Tam se mohou v grafech vyskytovat smyčky (viz kapitola 4.1), které v matici sousednosti zaznamenáme číslem 1.

Ke každé matici, ve které se vyskytují pouze 1 a 0, dokážeme najít vhodný graf, jehož je tato matice maticí sousednosti.



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obr. 12: Graf a jeho matice sousednosti

V případě orientovaného grafu matice sousednosti ve většině případů symetrická není. Pokud by byla v grafu nějaká hrana dvojnásobná (příp. vícenásobná), tzn., že dva uzly by byly propojeny dvěma (příp. více) hranami, nevyskytovaly by se v něm pouze jedničky a nuly, ale i dvojky (příp. vyšší čísla). Může se stát, že dva grafy (oba orientované nebo oba neorientované) mají stejnou matici sousednosti; potom jsou tyto dva grafy navzájem izomorfní. Obrácená implikace ovšem neplatí. Dva navzájem izomorfní grafy nemusí mít stejné matice sousednosti. Stejné matice sousednosti mají graf neorientovaný a jeho symetrická orientace. Podle samotné symetrické matice tedy není možné rozhodnout, zda se jedná o neorientovaný graf či nikoliv.

Definice

„Nechť *G* je orientovaný graf bez smyček. Zvolíme-li (libovolně, ale pevně) nejen pořadí vrcholů $v_1, \dots, v_n$, ale i pořadí hran $e_1, \dots, e_m$, můžeme grafu *G* přiřadit matici incidence (též incidenční matici) B_G typu (m, n) předpisem

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } v_i \text{ je počátečním vrcholem hrany } e_j, \\ -1, & \text{jestliže } v_i \text{ je koncovýn vrcholem hrany } e_j, \\ 0 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Pro neorientované grafy bez smyček se incidenční matice definuje předpisem

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } v_i \text{ je incidentní s hranou } e_j, \\ 0 & \text{v ostatních případech.}" \end{cases}$$

(Demel, 2002, s. 25)

$$B_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obr. 13: Orientovaný a neorientovaný graf a jejich matice incidence

Není překvapivé, že v matici incidence orientovaného grafu (viz obrázek 13 vlevo) je v každém sloupci právě jedna 1 a právě jedna –1. Je to proto, že jednotlivé sloupce reprezentují orientované hrany a každá hrana právě jedním uzlem začíná a právě jedním uzlem končí. S ostatními uzly nemá tato hrana nic společného, proto jsou na zbývajících místech sloupce samé nuly. Též si můžeme všimnout, že v každém řádku matice incidence orientovaného grafu je součet hodnot roven rozdílu počtu hran z uzlu vycházejících a počtu hran do uzlu vstupujících.

Na obrázku 13 vpravo vidíme matici incidence neorientovaného grafu. Ta má v každém sloupci právě dvě 1, neboť každá hrana grafu na již zmiňovaném obrázku má na každém svém konci jeden uzel. Součet hodnot v každém řádku matice je roven počtu hran incidentních s příslušným uzlem matice.

Kromě grafického znázornění a matic můžeme grafy zadávat také pomocí seznamů uzlů a hran. Uzly jsou zapsány obyčejným výčtem prvků a hrany jsou charakterizovány třemi prvky (název hrany, počáteční uzel a koncový uzel). U orientovaných grafů je pořadí uzlů v popisu hrany striktně dáno orientací hrany, u neorientovaných grafů je pořadí uzlů náhodné. Tento způsob zadávání grafu je v praxi hodně často používán, neboť má několik výhod. Mezi ně patří univerzálnost, úspornost a snadný zápis i grafů s ohodnocenými hranami.

Pro představu uvádím příklad, kde pomocí seznamu uzlů a hran popíšeme graf z obrázku 13 vlevo.

„Vrcholy: v_1, v_2, v_3, v_4.

Hrany: (e_1, v_1, v_2), (e_4, v_3, v_2),

(e_2, v_1, v_2), (e_5, v_3, v_4),

(e_3, v_2, v_4), (e_6, v_3, v_1)."

(Demel, 2002, s. 26)

Další způsob zadání je pomocí seznamu uzlů a seznamů okolí uzlů. Jedná se o způsob velmi podobný předchozímu pouze s tím rozdílem, že hrany jsou vypsané po skupinách podle počátečního uzlu. Protože je počáteční uzel celé skupiny stejný, jsou hrany popisovány pouze svými názvy a koncovými uzly. Toto platí pro orientované grafy.

Pro názornost opět uvádím příklad popisu grafu z levé části obrázku 13.

„v_1: $(e_1, v_2), (e_2, v_2)$;
v_2: (e_3, v_4);
v_3: $(e_4, v_2), (e_5, v_4), (e_6, v_1)$;
v_4: $\emptyset$."

(Demel, 2002, s. 26)

U neorientovaných grafů jsou dvě možnosti. Buď popisujeme jednu z jeho orientací, nebo množinu všech hran incidentních s každým uzlem, což je zbytečně zdlouhavé, neboť každá hrana je zde zahrnuta dvakrát.

Poslední způsob, kterým je možné grafy zadávat, je nepřímý popis grafu pomocí algoritmů. V tomto případě není třeba znát celou množinu hran, ale stačí znalost algoritmu, který vyprodukuje všechny hrany vycházející z jednoho uzlu. Stejně tak není třeba znát celou množinu uzlů, stačí, když na nějaký uzel přijdeme díky zpracování hrany, jež v něm začíná nebo končí. Nepřímý popis grafu se používá při práci s grafy značných rozměrů, které jsou zadány popisem nějaké situace.

Párování

Definice

„Buď dán graf *G*. Párování v grafu *G* je taková množina hran $P \subseteq E(G)$, že žádné dvě hrany z množiny *P* nemají společný vrchol. Je zřejmé, že je-li *P* párování a $P' \subseteq P$, pak P' je také párování. Dokonce i prázdná množina je párováním, ale málo zajímavým." (Demel, 2002, s. 161)

Počáteční nebo koncové uzly hrany, která patří do párování *P*, se nazývají nasycené párováním *P*. Uzly, které nejsou nasycené, jsou volné. V případě nasycenosti všech uzlů grafu párováním *P* se jedná o perfektní párování.

Při řešení úloh hledáme vždy jeden ze tří následujících typů párování:

- maximální párování; to je párování obsahující maximální počet hran;
- nejlevnější maximální párování; to je párování, které hledáme v grafu s cenově ohodnocenými hranami; je nejlevnější a zároveň maximální;
- nejdražší párování; taktéž se jedná o párování, které hledáme v grafu s cenově ohodnocenými hranami; je to párování s nejvyšším součtem cen hran.

Nezávislá množina a nezávislost grafu

Nezávislá množina uzlů v grafu G je množina, ve které nejsou žádné dva uzly propojeny hranou. **Maximální nezávislá množina** je taková nezávislá množina, které již nemůžeme přidat žádný vrchol tak, aby zůstala nezávislou množinou. **Nejpočetnější nezávislá množina** je nezávislá množina, která má ze všech nezávislých množin v grafu G největší počet prvků. **Nezávislost grafu $\boldsymbol{G}$**, kterou značíme $\alpha(G)$, je počet uzlů nejpočetnější nezávislé množiny grafu G.

3 Historie

V prvních dvou částech kapitoly o historii teorie grafů se zmíním o úlohách, které byly v minulosti významnými podněty pro zkoumání této matematické oblasti. Jedná se o Úlohu sedmi mostů a o Problém čtyř barev. Dále následuje stručná zmínka o tom, co bylo považováno za skutečný vznik teorie grafů. A chybět nesmí ani první zmínky o teorii grafů v Československu. Další částí je pohled do vývoje grafové terminologie a nakonec stručný přehled dalších významných matematiků, kteří se nějakým způsobem na vzniku a rozvoji teorie grafů podíleli. Hlavním zdrojem informací této kapitoly je kniha (Šišma, 1997), dále pak kniha (Sedláček, 1981) a (Opava, 1989).

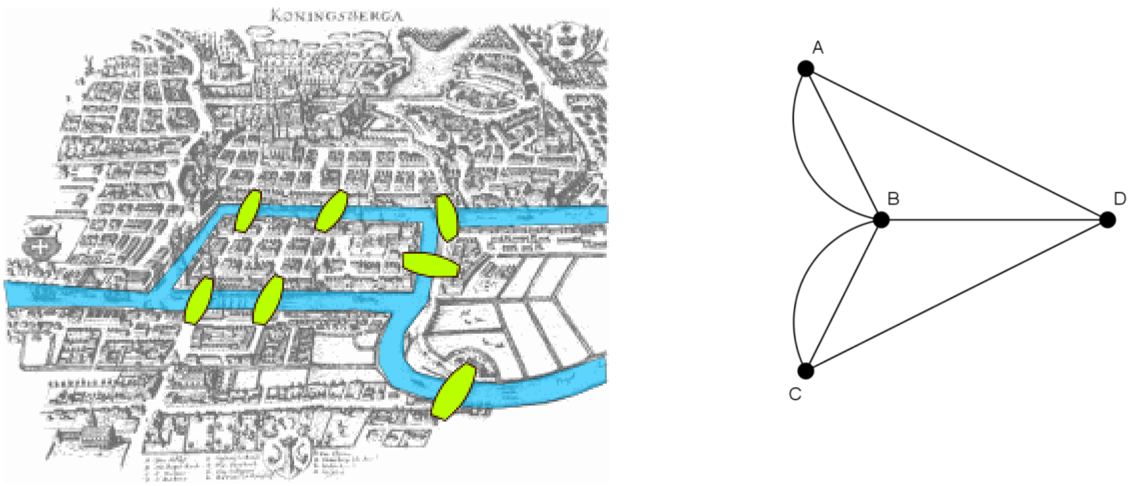
3.1 Úloha sedmi mostů

První zmínky o teorii grafů pochází z 18. století. Jednalo se tehdy o dnes velmi známou úlohu sedmi mostů ve městě Königsbergu ve východním Prusku (dnešním Kaliningradu v Rusku). Königsbergem tehdy protékala řeka Pregel, která vytvářela dva ostrovy a bylo na ní sedm mostů (viz obrázek 14). Obyvatele města zajímalo, zda je možné vyjít z jednoho konkrétního místa, přejít přes každý most právě jednou a opět se do výchozího bodu vrátit. Touto otázkou se zabýval též velmi známý švýcarský matematik Leonhard Euler, který v roce 1736 dokázal, že úloha je neřešitelná. Není úplně jisté, kdy přesně a jak se k problému dostal. Teoreticky to mohl být profesor matematiky na akademickém gymnáziu v Danzigu (dnešní Gdaňsk) Heinrich Kühn, ale stoprocentně to nevíme. V březnu 1736 informoval stručnými náznaky řešení italského matematika Giovanniho Jacoba Marinonima. Detailní řešení poslal o několik dní později Ehlerovi. Toto podrobné řešení pak bylo vydáno ve sborníku Petrohradské akademie za rok 1736. Díky vypracování obecného postupu pro řešení podobných úloh je L. Euler považován za zakladatele teorie grafů.

Zjednodušeně Euler vyřešil „Problém sedmi mostů“ takto:

Nejprve si reálný obrázek (schéma) překreslil do grafového schématu. „Potom čtyři části města Königsbergu oddělené řekou Pregel označil postupně velkými písmeny abecedy (A, B, C, D) a mosty malými písmeny abecedy (a, b, c, d, e, f, g). Euler převedl problém mostů na nalezení posloupnosti 8 písmen (A, B, C a D) takové, že dvojice (AB), (AC) se v ní objeví dvakrát, zatímco dvojice (AD), (BD) a (CD) právě jednou. Písmena představují jednotlivé části města a dvojicím odpovídají mosty přes řeku Pregel.“ (Šišma, 1997, s. 15)

„Protože existuje 5 mostů, které končí v části A, pak posloupnost písmen musí obsahovat písmeno A třikrát. Podobně 3 mosty vedoucí do části B, C a D znamenají, že tato písmena budou v posloupnosti dvakrát. To ovšem není možné, protože posloupnost má jen 8 písmen.“ (Šišma, 1997, s. 15)



Obr. 14: Mosty v Königsbergu[1] a jejich převedení do podoby grafu

3.2 Problém čtyř barev

Problém čtyř barev je další zajímavou otázkou teorie grafů. První zmínky pocházejí z poloviny 19. století, kdy Augustus de Morgan informoval Williama Rowana Hamiltona o otázce, kterou obdržel od jednoho svého studenta na University College v Londýně. Na tuto otázku vlastně přišel bratr onoho studenta. Společně přišli na to, že na obarvení mapy stačí pouze čtyři barvy. Snažili se najít případ, který jim jejich teorii vyvrátí, ale nepovedlo se jim to. Hamilton tehdy obratem odpověděl, že se problémem zaobírat nebude.

De Morgan tedy začal otázku šířit, kde se dalo. Zabývala se jí řada odborníků nejen z oblasti matematiky. Jedním z nich byl i londýnský advokát Alfred Bray Kempe. V polovině roku 1879 přišel s informací, že dlouho hledanou odpověď na otázku problému

[1] Obrázek převzat z internetového zdroje (https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg?oldid=130498025#/media/File:Konigsberg_bridges.png)

čtyř barev našel. Jeho důkaz vyvolal veliké nadšení a vyšel v práci *On the geographical problem of the four colours*. Postupem času z tohoto důkazu byly odvozeny další důkazy a problém čtyř barev se zdál být vyřešen.

O jedenáct let později, tedy v roce 1890, upozornil na chybu v Kempeho důkazu britský matematik Percy John Heawood. Nekorektnost důkazu vysvětlil ve své první práci *Map–colour theorem*. Kempe svou chybu přiznal, ale napravit ji nedokázal. Heawoodova práce *Map–colour theorem* měla ve své době velký význam. Heawood v ní podal důkaz, že k obarvení jakékoliv mapy stačí pět barev, což byl na hodně dlouhou dobu jediný skutečný výsledek. Další Heawoodův přínos v této oblasti byl ve zkoumání barvení map na různých plochách, ne jen v rovině nebo na kulové ploše jako se zkoumalo doposud. Přišel například s důkazem, že k obarvení mapy na anuloidu stačí barev sedm.

Definitivně byl problém čtyř barev vyřešen až v 70. letech 20. století, ale pro svou náročnost z velké části pouze pomocí počítače. Pro matematiku měl tento problém dva veliké přínosy. V teorii grafů se díky němu objevilo několik nových pojmů, které do té doby nebyly definovány, a přilákal k teorii grafů spoustu významných matematiků, kteří chtěli mít svůj podíl na jeho vyřešení.

3.3 Skutečný vznik

Doba skutečného vzniku teorie grafů přišla ovšem o 200 let později, na počátku 20. století. V tomto období vydal maďarský matematik Dénes König první knihu o grafech *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (český překlad: Teorie konečných a nekonečných grafů), která byla vydána v Lipsku v roce 1936 a byla počátkem teorie grafů jako samostatného odvětví matematiky. Od roku 1927 si König vychovával řadu žáků díky svým přednáškám o grafech na budapešťské univerzitě. Druhou knihu zabývající se teorií grafů vydal v roce 1958 Claude Berge. Byla přeložena do celé řady jazyků, což jí umožnilo značné rozšíření.

3.4 První zmínky v Československu

První z československých matematiků, který se zabýval teorií grafů, byl brněnský matematik Otakar Borůvka. Koncem roku 1925 se zabýval problematikou nalezení minimální kostry grafu. Inspirován byl hledáním optimální elektrické sítě při elektrifikaci řady obcí na jižní a západní Moravě. Po snadném vyřešení tohoto problému v roce 1926 publikoval o hledání minimální kostry první práci s názvem *O jistém problému minimálním*. Borůvka byl první, kdo přišel s algoritmem k nalezení minimální kostry grafu.

Další československý matematik, který se zabýval hledáním minimální kostry grafu, byl Vojtěch Jarník. V roce 1929 napsal Borůvkovi dopis, ve kterém mu zmínil své jednodušší řešení problému v nalezení minimální kostry.

Borůvka s Jarníkem samozřejmě nebyli jediní matematici, kteří se hledáním minimální kostry zabývali. Mezi další významná jména patří americký matematik Joseph Kruskal, slovenský matematik Anton Kotzig, americký matematik Robert Clay Prim nebo nizozemský matematik a informatik Edsger Wybe Dijkstra.

Mimořádně důležitý rok v československé historii teorie grafů je rok 1963, kdy se konalo první mezinárodní symposium o teorii grafů v československých Smolenicích. Od této konference zaznamenáváme silný rozvoj teorie grafů u nás. Po této významné akci vyšla Jiřímu Sedláčkovi první česky psaná učebnice, kterou pak samozřejmě následovaly další české i slovenské knihy. Teorie grafů se začala přednášet na vysokých školách a postupem času se Československo stalo centrem bádání v teorii grafů.

Jiří Sedláček

Jiří Sedláček byl po Otakaru Borůvkovi a Vojtěchu Jarníkovi dalším významným československým matematikem zabývajícím se teorií grafů. Jeho prvním dílem v oblasti teorie grafů byla jeho kandidátská práce, kterou obhájil v roce 1956. Od té doby se tomuto odvětví matematiky věnovat nepřestal. Byl autorem první české knížky o teorii grafů s názvem Kombinatorika v teorii a praxi – úvod do teorie grafů, která vyšla v roce 1964. V šedesátých letech uspořádal první pravidelný seminář z teorie grafů. Též byl spoluorganizátorem a účastníkem celé řady národních i mezinárodních konferencí v oblasti teorie grafů. Jiří Sedláček byl autorem více než třiceti vědeckých prací zabývajících se jednak vztahy mezi grafy a maticemi a později kostrami grafu.

Milan Sekanina

I když pro Milana Sekaninu nebyla teorie grafů hlavním vědeckým zájmem, byl stejně jako jeho předchůdci jedním z průkopníků v této oblasti matematiky v Československu. Jeho jméno je spojováno především s větou o třetí mocnině grafů, která říká, že

„Třetí mocnina libovolného souvislého grafu s více než 2 uzly je hamiltonovský graf[2].“ (Šišma, 1997, s. 27)

Důkaz věty nalezneme v knize (Šišma, 1997) na straně 27.

Na toto téma napsal celou řadu svých vědeckých prací. Zabýval se ale i dalšími oblastmi teorie grafů. Významný je také jeho podíl na aplikaci teorie grafů a to především v organické chemii.

3.5 Vývoj terminologie

Terminologie teorie grafů rozhodně nesahá tak daleko jako první zmínky o nich. Proto se v ní nevyskytují žádné výrazy ze starších dob. Najdeme zde slova z běžné slovní zásoby, která bychom si kolikrát s matematikou ani nespojili, z jiných matematických oborů apod. Jako příklad si můžeme uvést slovo uzel, cesta, strom. Z oblasti geometrie je to např. kružnice nebo trojúhelník. Další oblastí výrazů, které teorie grafů využívá, je oblast mezinárodní. Do této skupiny bychom zařadili slova cyklus, artikulace a další.

V roce 1936 vyšla Königova kniha o konečných a nekonečných grafech a měla značný vliv na českou terminologii. To znamená, že v té době řada výrazů přicházela z němčiny. V současné době vychází literatura převážně v jazyce anglickém. Vznikají dokonce jazykové slovníky týkající teorie grafů. Např. Claude Berge vydal slovník francouzsko-anglicko-německý nebo Dragoš Cvetkovič a M. Milič srbochorvatsko-anglicko-německo-francouzsko-ruský. Proběhlo několik pokusů o vytvoření mezinárodních výrazů pro snazší komunikaci mezi všemi grafovými teoretiky, ale nakonec jediné slovo, které všechny propojuje, je slovo graf. I v rámci jednoho jazyka existuje pro určitý výraz několik slovíček. Například pro slovo uzel má angličtina tři výrazy (vertex, node, point) a němčina dokonce čtyři (Knotenpunkt, Knoten, Punkt, Ecke). Pouze francouzština si vystačí si

[2] Pojem hamiltonovský graf je zaveden v kapitole 3.5 Vývoj terminologie

jedním slovem (sommet). Podobně je to s výrazem hrana, kde má angličtina opět hned tři zástupce (edge, line, arc), němčina si zde překvapivě vystačí pouze s jedním slovem (Kante). Orientovaný graf se v anglickém jazyce označuje pojmem digraph. Je to uměle vytvořené slovo vycházející ze slovního spojení directed graph. Je zajímavé, že tato umělá složenina se ujala i v němčině a řadě dalších jazyků. Pouze ruština si vytvořila pro orientovaný graf svou vlastní zkratku a tou je orgraf. V českém jazyce se žádné tyto složeniny apod. neujaly, a proto jsme zůstali u pojmu orientovaný graf.

Pojem strom, který je definován v kapitole Základní pojmy, pochází z druhé poloviny 19. století. Jeho tehdejší definice byly různé. Nejčastěji se objevovala ta, podle které je strom souvislý graf, který jako podgraf neobsahuje kružnici. S jinou definicí přišel např. Camille Armand de Polignac, podle kterého je strom konečný graf, kde je libovolná dvojice uzlů spojena právě jednou cestou. Proč byl pro tento typ grafu zvolen název právě strom, je zřejmé z obrázku číslo 9, neboť velmi často vzhled stromu připomíná. V anglickém jazyce má tento typ grafu dva výrazy. Tree, který se používá pouze pro kořenové stromy, a ramification označující stromy nekořenové. Francouzština je na tom velmi podobně, nalezneme zde též pojem ramification a běžné slovíčko pro strom arbre. U francouzského matematika Camille Jordana se objevuje ještě třetí výraz pro strom, kterým je assemblage à continuité simple. V němčině Dénes König použil obvyklý výraz Baum.

Graf typu strom a jeho vlastnosti patřil k těm, které byly studovány jako první již v polovině 19. století. V této době se též objevilo jeho první praktické využití v organické chemii. Chemici začali využívat graf, zvláště pak strom, jako nástroj pro vyjádření a zkoumání chemických látek. Speciálně grafické znázornění isomerů alkanů C_nH_{2n+2}, které je blíže popsáno v kapitole 4.3, je vždycky strom.

Hamiltonovská kružnice, což je kružnice obsahující všechny uzly grafu, pochází též z 19. století. V té době se Thomas Penyngton Kirkman zabýval studiem kružnic na hranách mnohostěnů. V jedné ze svých prací řešil otázku, zda při promítnutí mnohostěnu do roviny získáme graf s kružnicí, která zahrnuje všechny uzly grafu. Kirkman nenašel mnohostěny, které takovou kružnici obsahují, ale naopak objevil skupinu mnohostěnů, při jejichž průmětu do roviny graf obsahující kružnici se všemi uzly nikdy nedostaneme. V polovině

19. století se problematikou těchto kružnic zabýval také William Howan Hamilton. Přišel na to, že onu hledanou cestu nalezneme v případě promítnutí pravidelného dvanáctistěnu do roviny. Na základě tohoto objevu vznikla hra, která dostala název Icosian Game (později Cesta kolem světa) a od roku 1859 se prodávala. Ve hře vrcholy pravidelného dvanáctistěnu znázorňovaly velká města světa a účelem bylo všemi městy projít a vrátit se zpět do města výchozího. Vzhledem k tomu, že Hamilton nebyl jediný, kdo se studiem kružnic na hranách mnohostěnů zabýval, vedly se spory o pojmenování těchto kružnic. Nakonec na počest Hamiltona získaly název hamiltonovské. V případě, že se nejedná o celou kružnici, ale pouze o její část, tedy cestu, nazývá se tato cesta též hamiltonovská. A graf, který obsahuje hamiltonovskou kružnici, se nazývá hamiltonovský graf. Hamiltonovsky souvislý graf je graf, ve kterém každé dva různé uzly můžeme propojit hamiltonovskou cestou.

Další pojem pocházející z poloviny 19. století je kostra grafu. K tomuto tématu významně přispěl svou první prací Gustav Robert Kirchhoff. V roce 1845 přišel na dva fyzikální zákony, díky nimž jsme schopni určit velikosti proudů v elektrické síti. Zákony říkají, že můžeme vytvořit soustavu lineárních rovnic s neznámými velikostmi proudů v jednotlivých obvodech pro každou elektrickou síť. Protože nebylo blíže specifikováno, pro které obvody rovnice psát a pro které ne, psaly se pro všechny. Ovšem tyto rovnice jsou lineárně závislé na ostatních. To byl podnět pro Kirchhoffa, který se snažil najít pouze obvody, pro které by byly rovnice soustavy lineárně nezávislé.

Pokud chceme převést elektrickou síť do grafu, uzly sítě nahradíme uzly grafu a elektrické vodiče spojující uzly sítě nahradíme hranami grafu. Kirchhoff objevil tzv. cyklomatické číslo grafu $\mu(G) = m - n + 1$, kde m je počet hran grafu G a n je počet uzlů grafu G, a dokázal, že toto číslo představuje počet nezávislých obvodů v elektrické síti.

Denes König vyslovil větu, ve které ukázal, jak souvisí cyklomatické číslo grafu $\mu(G)$ s kostrou grafu. Nejdříve ale zmíním jeho definici kostry grafu, která je v dnešní době běžnou definicí kostry grafu souvislého grafu:

„Podgraf *G'* libovolného (konečného nebo nekonečného) grafu *G* nazveme kostrou grafu *G*, když má následující vlastnosti:

1. *G'* neobsahuje kružnici;
2. pokud ke grafu *G'* přidáme libovolnou hranu grafu *G*, která není obsažena v *G'*, pak vzniklý graf obsahuje právě jednu kružnici." (Šišma, 1997, s. 33)

Nyní uvádím Königovu výše zmiňovanou větu:

„Každý konečný graf G s cyklomatickým číslem $\mu(G)$ má kostru, kterou dostaneme tak, že z G odstraníme právě $\mu(G)$ hran." (Šišma, 1997, s. 33)

Další důležitá Königova věta zní:

„Nechť *G'* je kostra grafu *G* a *k* libovolná hrana grafu *G*, která nepatří do *G'*, pak existuje právě jedna kružnice K_k v grafu *G*, která obsahuje hranu *h* a všechny její ostatní hrany patří do *G'*." (Šišma, 1997, s. 34)

Systém kružnic, který vznikne způsobem, o němž nám říká právě uvedená věta, se nazývá **fundamentální systém kružnic**. Poprvé s tímto označením přišel Wilhelm Ahrens ve své práci *Über das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung* vydané v roce 1897. Počet prvků fundamentálního systému kružnic je roven cyklomatickému číslu grafu $\mu(G)$. Každá kostra grafu má takto přiřazen právě jeden fundamentální systém kružnic. Jejich vztahem se zabýval Oswald Veblen v práci *Analysis situs*, která vyšla v roce 1922.

3.6 Další světoví matematici, kteří se zabývali teorií grafů

Zdrojem informací této podkapitoly jsou internetové zdroje (14), (15), (16), (18), (21).

Oystein Ore (1899 – 1968)

Norský matematik, který od roku 1927 přednášel na univerzitě v Yale ve Spojených státech amerických. Dohromady napsal 120 vědeckých prací a 10 knih, z toho se tři knihy zabývaly teorií grafů. První byla *Theory of Graphs,* kterou napsal v roce 1962. O rok později napsal knihu *Graphs and Their Uses* a v roce 1967 mu vyšla kniha zabývající se problémem čtyř barev s názvem *The Four-Color Problem*.

Frank Harary (1921 – 2005)

Americký matematik, v roce 1969 napsal svou první knihu o teorii grafů s názvem *Graph Theory*. Jeho zásluhou je ustálení grafové terminologie v anglickém jazyce a symboliky.

Gerhard Ringel (1919 – 2008)

Rakouský matematik a jeden z průkopníků teorie grafů. Napsal knihu, ve které se věnuje problematice barvení ploch a grafů.

Paul Erdös (1913 – 1996)

Jeden z nejznámějších světových matematiků. Zabýval se nejrůznějšími matematickými obory a také teorií grafů. Byl posluchačem Königových přednášek na budapešťské univerzitě. Výrazně přispěl k velkému rozkvětu teorie grafů. O grafech napsal mnoho svých prací.

Gabriel Andrew Dirac (1925 – 1984)

Matematik, který se zabýval převážně teorií grafů. Přišel s postačující podmínkou pro graf obsahující hamiltonovskou kružnici.

4 Aplikace teorie grafů

V této kapitole se věnuji aplikaci teorie grafů v nejrůznějších oblastech, počínaje matematikou (binární relace a permutace), přes kartografii (barvení mapy), chemii (izomery alkanů), český jazyk (stavba vět), rekreační matematiku (úloha o převozníkovi, jednotažky a přelévání vody), výběrové řízení firmy a konče u setkávání se s grafy u dětí na 1. stupni základní školy.

4.1 Binární relace

Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Novotná, Trch, 1993).

Definice

„Binární relace R mezi množinami A, B je libovolná podmnožina R kartézského součinu množin A, B. Pro dva prvky $a \in A, b \in B$ takové, že $(a, b) \in R$, píšeme též aRb a čteme „(prvek) a je v relaci R s (prvkem) b“.
Je-li speciálně $A = M = B$, říkáme, že R je relace na množině M“.

(Novotná, Trch, 1993, s. 27)

Binární relace může být zadávána (resp. znázorňována) několika různými způsoby:

- charakteristickou vlastností
- výčtem prvků, který je též možno přepsat do tabulky

Binární relace na množině může být znázorňována též graficky:

- pomocí uzlového grafu
- pomocí kartézského grafu

Vlastnosti binárních relací:

Binární relace R na množině M se nazývá

- **reflexívní**, jestliže platí

$$\forall x \in M: xRx, \text{ resp. } \forall x \in M: (x, x) \in R$$

tzn., že každý prvek je v relaci sám se sebou;

- **antireflexívní**, jestliže platí

$$\forall x \in M: non\ xRx, \text{ resp. } \forall x \in M: (x, x) \notin R$$

tzn., že žádný prvek není v relaci sám se sebou;

- **symetrická**, jestliže platí

$$\forall x, y \in M: (xRy \Rightarrow yRx), \text{ resp. } \forall x, y \in M: [(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R]$$

tzn., když je první prvek v relaci s druhým, je i druhý prvek v relaci s prvním;

- **antisymetrická**, jestliže platí

$$\forall x, y \in M: (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y,$$

$$\text{resp. } \forall x, y \in M: [(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R] \Rightarrow x = y$$

tzn., když je první prvek v relaci s druhým a druhý v relaci s prvním, pak se tyto prvky rovnají;

- **tranzitivní**, jestliže platí

$$\forall x, y \in M: (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

tzn., je-li první prvek v relaci s druhým a druhý prvek v relaci se třetím, pak je první prvek v relaci se třetím;

- **konektivní**, jestliže platí

$$\forall x, y \in M: (xRy \vee x = y \vee yRx)$$

tzn., nastává alespoň jedna ze tří následujících možností: první prvek je v relaci s druhým, nebo je druhý prvek v relaci s prvním, nebo se první a druhý prvek rovnají;

- **trichotomická**, jestliže pro každé $x, y \in M$ nastává <u>právě</u> jedna z možností

$$xRy, x = y, yRx.$$

tzn., nastává právě jedna ze tří následujících možností: první prvek je v relaci s druhým, nebo je druhý prvek v relaci s prvním, nebo se první a druhý prvek rovnají.

Binární relace na množině M se nazývá

- **tolerance** na množině M, je-li reflexívní a symetrická;
- **ekvivalence** na množině M, je-li reflexívní, symetrická a tranzitivní (tj. je-li tranzitivní tolerancí).

V případě grafického znázornění binárních relací pomocí uzlového grafu zakreslujeme jednotlivé prvky množiny M nejčastěji pomocí puntíků (uzly grafu). To, že je jeden prvek v relaci s druhým, znázorníme šipkou od prvního ke druhému (orientovaná hrana grafu). Pokud je prvek v relaci sám se sebou, zaznamenáme tuto skutečnost smyčkou okolo uzlu.

Binární relace, která je reflexívní, musí mít smyčku okolo každého uzlu grafu. Naopak antireflexívní binární relace nemá v grafickém znázornění ani jeden uzel, okolo kterého by byla smyčka. Graf relace, která je symetrická má oboustranné šipky (orientované hrany) mezi svými uzly. Pokud je relace tranzitivní, tak vede-li šipka od jednoho uzlu ke druhému a od druhého ke třetímu, musí vést také od prvního uzlu ke třetímu. U grafického znázornění relace, která je tolerancí, musí být okolo každého uzlu smyčka a všechny šipky, které se v grafu vyskytují, musí být oboustranné. Graf ekvivalence musí mít okolo každého uzlu smyčku, všechny šipky, které se v grafu vyskytují, musí být oboustranné a vede-li šipka od jednoho uzlu ke druhému a od druhého ke třetímu, musí vést také od prvního uzlu ke třetímu.

Příklad

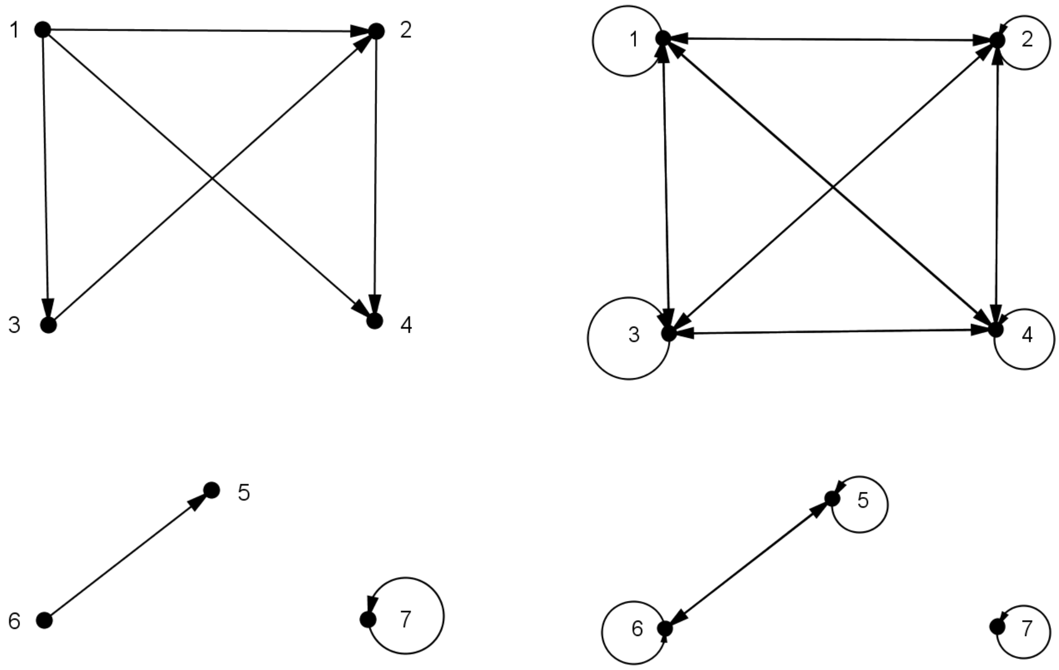
Relaci R na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ máme zadanou uzlovým grafem. Doplňme relaci R na dané množině M co nejmenším počtem dvojic prvků z M tak, aby se R stala ekvivalencí.

Řešení:

Ze zadání víme, že $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (6, 5), (7, 7)\}$.
Aby byla relace R reflexívní, musíme doplnit dvojice $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$.

Aby byla relace R symetrická, musíme doplnit dvojice $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$, $(5, 6)$.

Aby byla relace R tranzitivní, musíme doplnit dvojice $(3, 4)$, $(4, 3)$.



Obr. 15: Zadání úlohy a řešení úlohy s relací

Aby byla relace ekvivalencí, musí být reflexivní, symetrická a tranzitivní. Pro reflexivitu musíme doplnit v grafu smyčky kolem každého uzlu, pro symetrii musíme zajistit obousměrnost všech šipek. V případě tranzitivity, pokud směřuje šipka od prvního prvku kde druhému a od druhého ke třetímu, musí vést i od prvního ke třetímu.

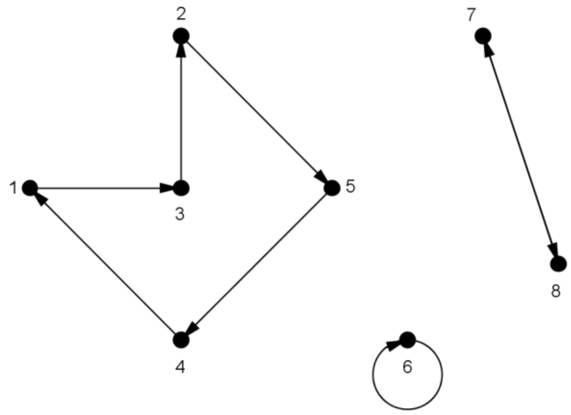
4.2 Permutace

Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Sedláček, 1981).

Za přehledným grafickým znázorňováním permutací se taktéž schovává teorie grafů, konkrétně orientované grafy.

Máme danou permutaci $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Při grafickém znázornění zadané permutace (viz obrázek 16) nejprve do roviny zakreslíme body 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Dle zadání číslu 1 permutace přiřadí číslo 3. Vedeme tedy v grafickém nákresu šipku od čísla 1 k číslu 3. Potom od čísla 3 pokračujeme šipkou k číslu 2, následně k číslu 5, poté k číslu 4 a nakonec od čísla 4 zpět k číslu 1. Číslu 6 přiřazuje permutace číslo 6, v obrázku uděláme kolem bodu s číslem 6 smyčku. A na závěr vedeme šipku od čísla 7 k číslu 8 a naopak.



Obr. 16: Grafické znázornění zadané permutace

4.3 Kartografie – barvení mapy

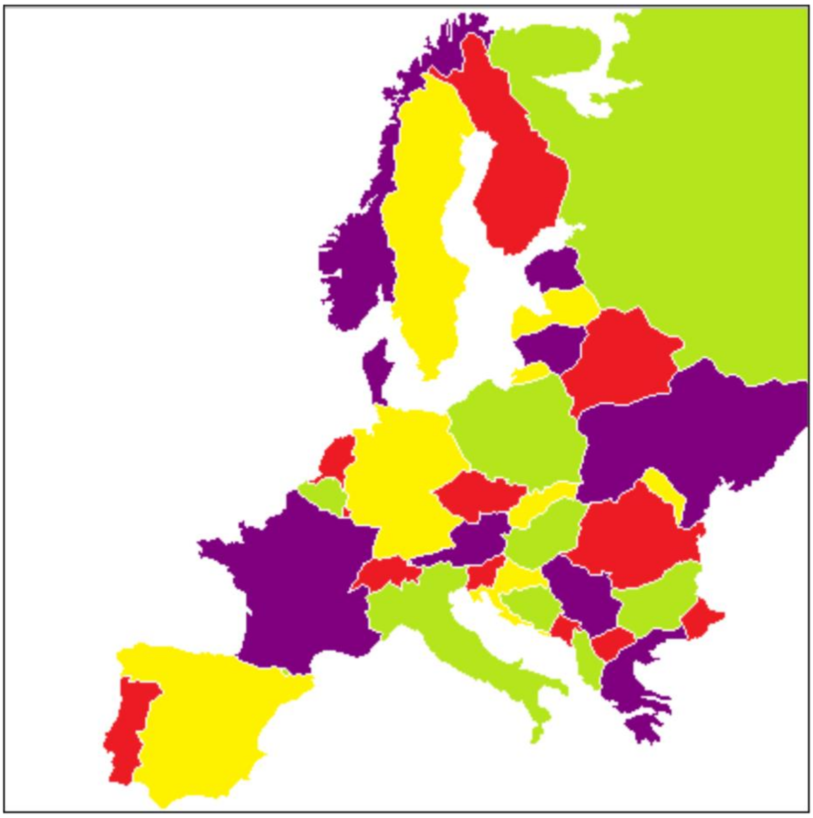
Zdrojem informací této podkapitoly jsou knihy (Opava, 1989), (Šišma, 1997) a (Matoušek, Nešetřil, 2009)

Problém čtyř barev (jeden z nejproslulejších problémů matematiky)

Na politických mapách mají jednotlivé státy takové barvy, aby žádné dva sousední státy neměly stejnou barvu. Za sousední státy se považují pouze ty, které mají společnou hraniční čáru, nikoliv ty, které mají společný pouze jeden bod. Otázkou je, kolik různých barev potřebujeme k vybarvení jakkoliv velké mapy. Je zřejmé, že tři barvy nestačí (pokud bychom měli vybarvené Rakousko, Německo a Francii, nemohli bychom vybarvit Švýcarsko). V roce 1890 bylo anglickým matematikem Percym Johnem Heawoodem dokázáno, že k vybarvení jakékoliv mapy stačí pět barev. Podle mnohaletých zkušeností odborníků, by k vybarvení jakékoliv mapy (rovinné nebo na glóbu) měly stačit čtyři barvy.

Obr. 17: Částečně vybarvená mapa Evropy

Je zřejmé, že na vybarvení států na mapě Evropy, za podmínky, že žádné dva sousední státy nesmí být vybarveny stejnou barvou, nestačí jedna nebo dvě barvy. Otázkou je, zda by nestačily barvy tři. Pokud začneme vybarvovat mapu Evropy od jihovýchodu, velmi brzy přijdeme na to, že i tři barvy jsou málo. Z obrázku 17 je patrné, že pro Srbsko, které je označené křížkem (X), už žádná barva nezbyla.



Obr. 18: Vybarvená mapa Evropy

Na obrázku 18, kde už je celá mapa Evropy vybarvená, vidíme, že skutečně stačí čtyři barvy.

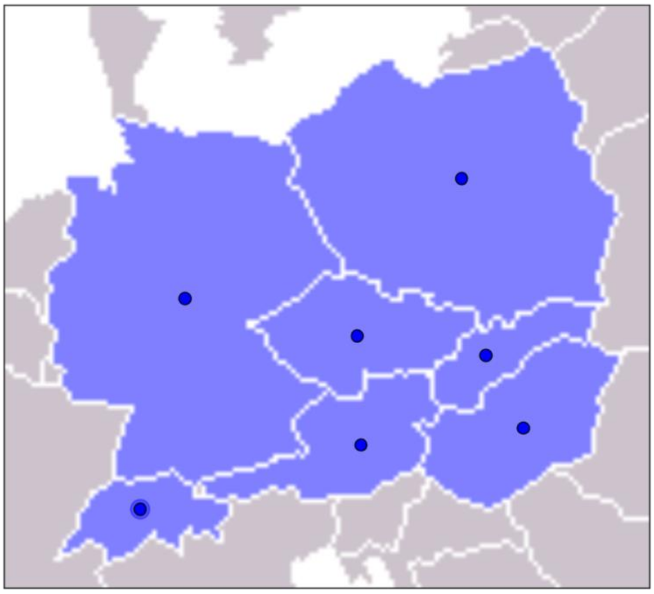
Definice (Barevnost grafu)

„Buď $G = (V, E)$ graf, k přirozené číslo. Zobrazení $b: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ nazveme obarvením grafu G pomocí k barev, pokud pro každou hranu $\{x, y\} \in E$ platí $b(x) \neq b(y)$. Barevnost grafu G, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev potřebný pro obarvení G.“

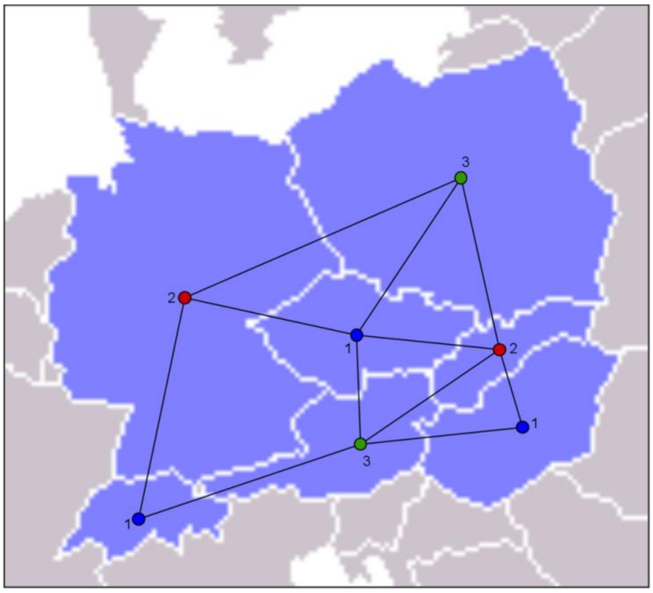
(Matoušek, Nešetřil, 2009, s. 222)

Matematický pohled na danou problematiku

Hlavní města států si představíme jako uzly grafu a hlavní města sousedních států spojíme hranou. Místo jednotlivých barev můžeme uzly grafu očíslovat. V tuto chvíli máme již kartografický problém převeden do matematiky, resp. do teorie grafů (viz obrázek 19 a 20).



Obr. 19: Převedení mapy do podoby grafu (přechodová část)



Obr. 20: Mapa převedená do podoby grafu

4.4 Plánování procesů

Aplikace teorie grafů, která je v této podkapitole, by mohla být součástí podkapitoly předchozí, neboť se týká též barvení grafu. Vzhledem k tomu, že s kartografií jako takovou nic společného nemá, dala jsem ji samostatně. Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Demel, 2002)

Uvažujeme n procesů, které jsou označeny $p_1, p_2, \dots, p_n$. Naším úkolem je naplánovat jejich průběh s tím, že některé dvojice procesů z nějakého důvodu nemohou, nebo dokonce nesmějí, probíhat zároveň. Dále víme, že všechny procesy probíhají stejně dlouho. Otázkou je, kolik časových period (jedna perioda odpovídá době průběhu jednoho procesu) potřebujeme k provedení všech procesů. Druhým úkolem je zjistit, kolik nejvíce procesů můžeme provádět současně.

Úlohu si představíme jako barvení grafu (mapy). Uzly znázorňují jednotlivé procesy. Hrany odpovídají situaci, kdy dva procesy nesmějí probíhat zároveň. Nyní obarvíme jednotlivé uzly grafu. Stejně jako u map, uzly, které jsou spojeny hranou, nesmí být obarveny stejnou barvou. Na základě barevnosti grafu jsme získali informace o tom, které procesy mohou být provedeny současně (uzly mají stejnou barvu). Počet časových period, které potřebujeme k provedení všech procesů, odpovídá číslu $\chi(G)$, tedy minimálnímu počtu barev nutných k obarvení všech uzlů grafu. Největší počet procesů, které můžeme provádět současně, odpovídá číslu $\alpha(G)$, což je počet uzlů nejpočetnější nezávislé množiny grafu G (v této úloze největší počet uzlů obarvených jednou barvou).

4.5 Chemie – uhlovodíky a jejich izomery

Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Opava, 1989).

K nejjednodušším organickým látkám patří sloučeniny s obecným vzorcem C_nH_{2n+2}, $n \in N$, které se nazývají alkany neboli parafíny. V jejich molekule je tedy $n + (2n + 2) = 3n + 2$ atomů. Protože uhlík je čtyřvazný a vodík jednovazný, budou mít uzly vyjadřující uhlíkové atomy stupeň 4, a uzly vyjadřující vodíkové atomy stupeň 1. Jelikož na každé hraně leží dva uzly, je počet m všech hran vyjádřen vztahem

$$m = \frac{1}{2}(4c + h),$$

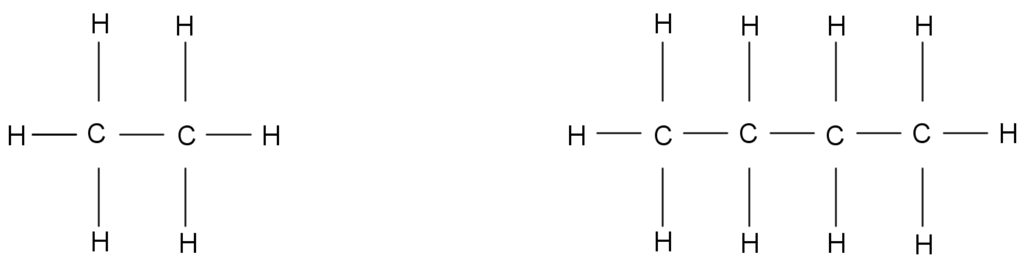
$c =$ počet uhlíkových atomů v molekule, $h =$ počet vodíkových atomů v molekule. Ze vzorce C_nH_{2n+2} je zřejmé, že $c = n$ a $h = 2n + 2$, z čehož vyplývá následující vztah pro počet všech hran

$$m = \frac{1}{2}\big(4n + (2n + 2)\big) = 3n + 1$$

Došli jsme k závěru, že počet hran je o 1 menší než počet uzlů. Vzhledem k tomu, že graf představující molekulu alkanu je souvislý, neexistuje v něm žádná kružnice. Musí tedy být strom.

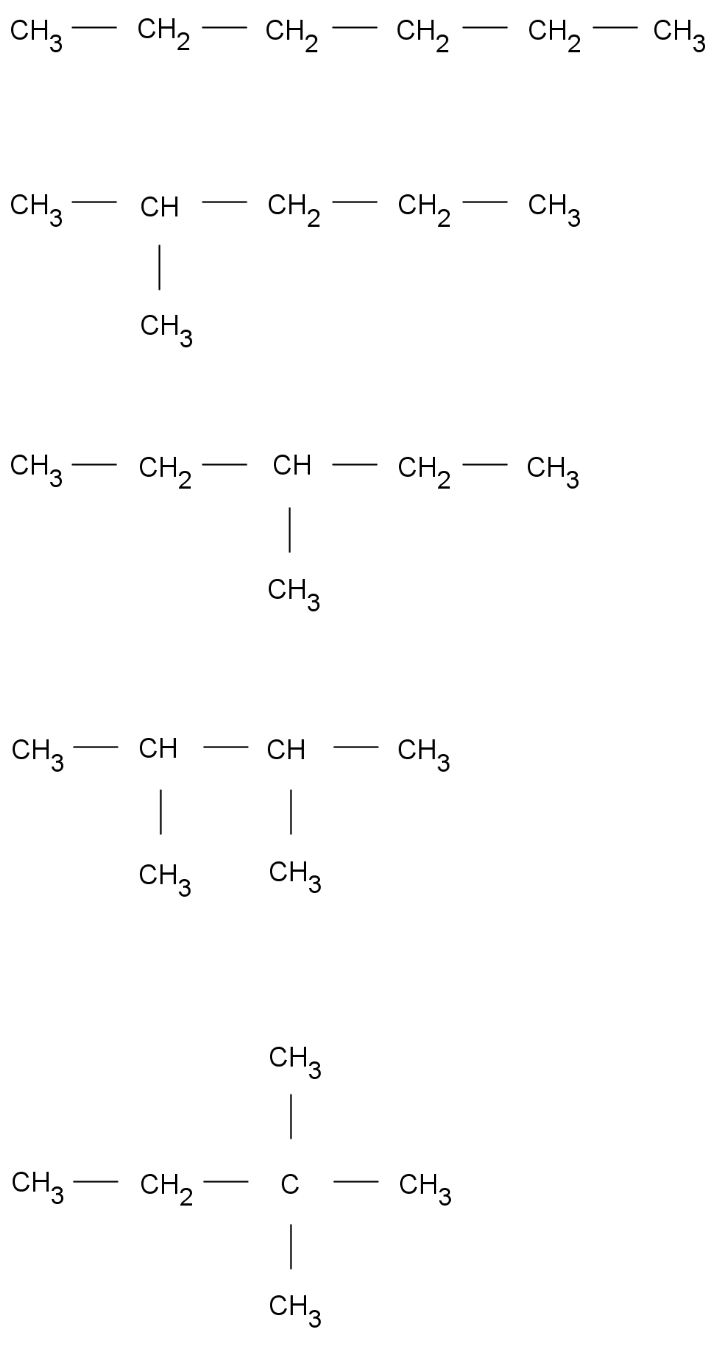
Matematický pohled na danou problematiku

Molekuly alkanů se znázorní pomocí stromů, kde uzly představují atomy uhlíku a hrany chemické vazby. Dva z nich (etan a butan) jsou k vidění na obrázku 21.



Obr. 21: Etan a butan

Izomery jsou látky, které mají tentýž sumární vzorec a různé strukturní vzorce. Metan, etan a propan mají každý pouze jeden izomer. Butan má již izomery dva, pentan tři a hexan pět. Izomery hexanu (hexan, 2-metylpentan, 3-metylpentan, 2,3-dimetylbutan a 2,2-dimetylbutan) vidíme na obrázku 22.



Obr. 22: Izomery hexanu

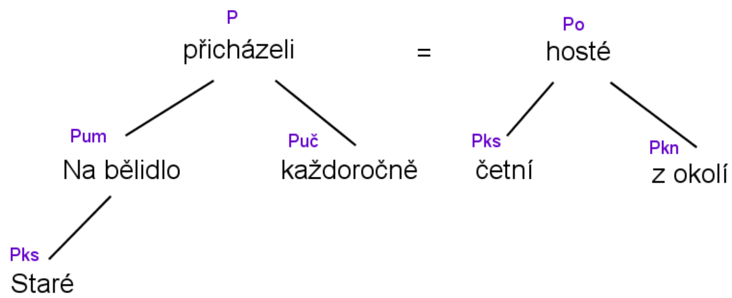
4.6 Jazykověda

Aniž bychom si to plně uvědomovali, grafy z teorie grafů nalezneme také v českém jazyce, přesněji v jazykovědě. Jedná se o grafické znázornění stavby věty jednoduché a souvětí. Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Hartmannová, 2002).

Stavba věty jednoduché

V grafickém znázornění stavby věty jednoduché si jako uzly grafu představíme jednotlivé větné členy a jako orientované hrany vazby mezi těmito členy. Počátečním uzlem nazveme členy řídící a koncovým uzlem členy závislé. Potom hrany „ohodnotíme“. Nejedná se o číselné hodnoty, ale o prvky množiny, která obsahuje názvy jednotlivých větných členů (zkratka P představuje přísudek, Po podmět, Pks přívlastek shodný, Pkn přívlastek neshodný, Pum příslovečné určení místa a Puč příslovečné určení času). Tímto ohodnocením vyjádříme vztahy mezi řídícími a závislými členy. Rovnítko mezi přísudkem a podmětem v obrázku číslo 23 představuje shodu mezi těmito dvěma větnými členy.

Příklad grafického rozboru jednoduché věty „Na Staré bělidlo přicházeli každoročně četní hosté z okolí,“ je na obrázku 23. (Hartmannová, 2002, s. 35)

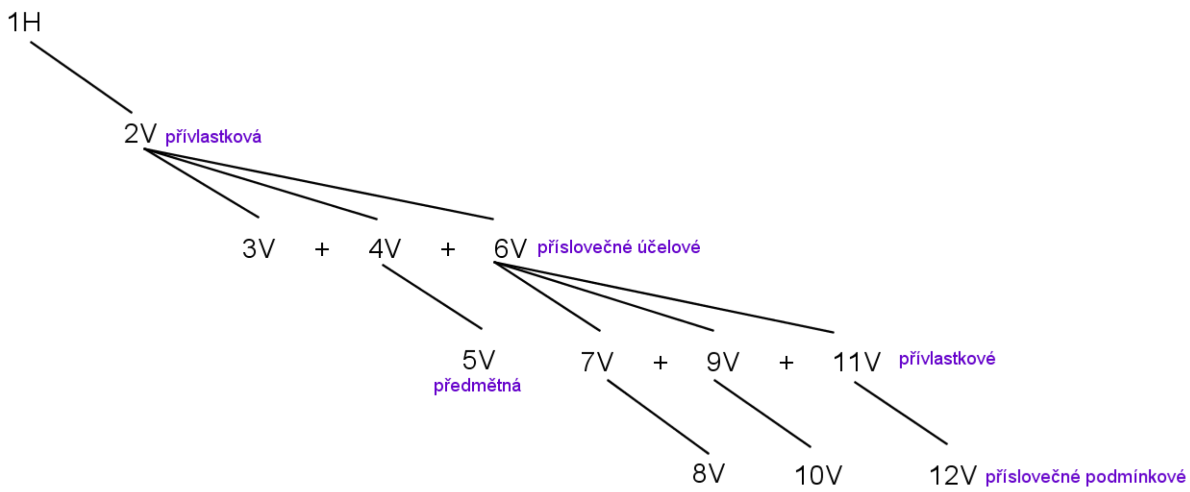


Obr. 23: Grafický rozbor věty jednoduché (Hartmannová, 2002, s. 35)

Stavba souvětí

V grafickém znázornění stavby souvětí si jako uzly grafu představíme jednotlivé věty, jako orientované hrany vazby mezi těmito větami (orientace hrany vyjadřuje závislost věty závislé na větě řídící; v případě souřadného spojení vět budou hrany neorientované).

Příklad grafické stavby souvětí „Hlediště divadla zaplnili diváci, kteří přišli, aby zhlédli slavnostní představení Smetanovy Libuše a aby s nadšením sledovali, co se odehrává na jevišti, a zaposlouchávali se do hudby, která dojímá, jestliže ji člověk prožívá, a silně podmaňuje, je-li člověk citlivý, a přináší neobyčejnou radost, je-li člověk soustředěný," je na obrázku 24. (Hartmannová, 2002, s. 126)



Obr. 24: Grafická stavba souvětí (Hartmannová, 2002, s. 188)

4.7 Převozník, vlk, koza a zelí

Jedná se o známou historickou úlohu z oblasti rekreační matematiky. Její řešení je poměrně snadné, ale jeho popis zdlouhavý. Proto si ukážeme grafické řešení. Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Opava, 1989).

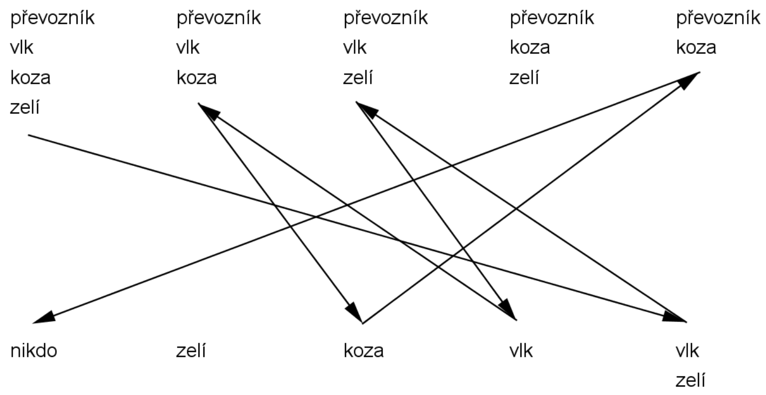
Převozník má z levého břehu řeky na pravý přepravit vlka, kozu a zelí. Loďka je ovšem malá a spolu s převozníkem se do ní vejde vždy jen jeden pasažér, tedy vlk nebo koza nebo zelí. Přeprava je navíc zkomplikována skutečností, že spolu na jednom břehu nesmí být o samotě vlk a koza (vlk by sežral kozu) a koza a zelí (koza by sežrala zelí). Jak má převozník převoz uskutečnit, aby dodržel výše uvedené podmínky?

Nejprve si vytvoříme přehled, jaké všechny možnosti mohou nastat na březích řeky:

převozník, vlk, koza, zelí	nikdo	
převozník, vlk, koza	zelí	
převozník, vlk, zelí	koza	
převozník, koza, zelí	vlk	
vlk, koza, zelí	převozník	X
převozník, vlk	koza, zelí	X
převozník, koza	vlk, zelí	
převozník, zelí	vlk, koza	X

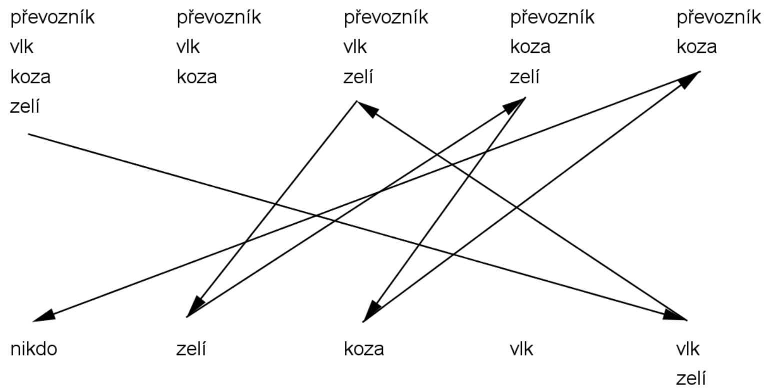
X … tyto situace dle zadání úlohy nesmí nastat

Vytvořený přehled možných situací na březích řeky převedeme do grafické podoby, kterou vidíme na obrázku 25 (jednotlivé situace představují uzly grafu), postupně řešíme a doplňujeme šipky (hrany grafu):



Obr. 25: První varianta řešení příkladu

Nejprve převozník odveze kozu a vrátí se sám. Dále převeze zelí, ale jelikož koza a zelí spolu nemohou zůstat bez dozoru, převozník naloží kozu a doveze ji zpět na původní břeh. Tam naloží vlka a převeze ho k zelí. Vrátí se sám, naloží kozu a odveze ji. V tu chvíli jsou všichni na druhém břehu řeky.



Obr. 26: Druhá varianta řešení příkladu

Druhé řešení je velmi podobné prvnímu, ale vymění se pořadí převozu zelí a vlka. V tomto případě je napřed převezena koza, potom vlk. Převozník se vrátí s kozou, naloží zelí a odveze ho k vlkovi. Vrací se sám pro kozu, po jejímž převozu jsou všichni kompletně na druhém břehu řeky.

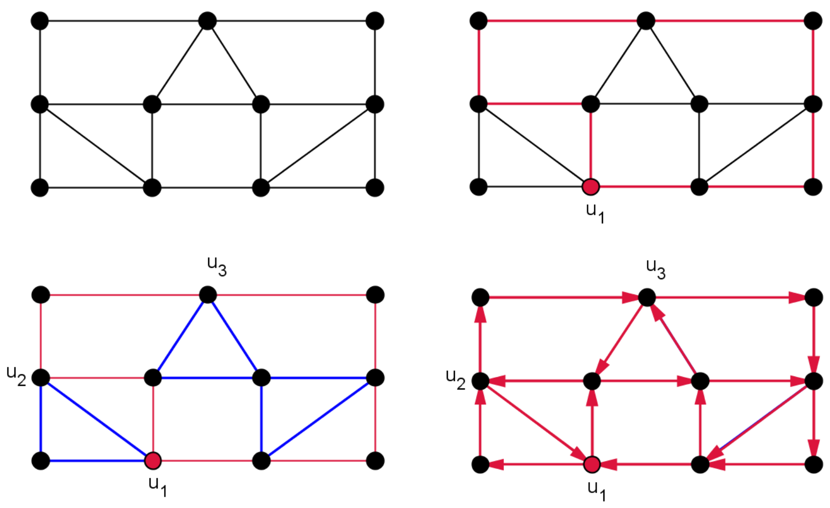
4.8 Aplikace eulerovských tahů

4.8.1 Jednotažky

Další velmi známou kapitolou rekreační matematiky jsou tak zvané „jednotažky“. Jedná se o úlohy, které začínají slovy: „Nakresli jedním tahem …“. Zdrojem informací této podkapitoly jsou knihy (Opava, 1989) a (Matoušek, Nešetřil, 2009).

Úlohy, kde je naším úkolem nakreslit obrázek jedním tahem navíc musí splňovat podmínku, že čáry se mohou protínat, ale každá smí být vytažena pouze jednou. V řeči teorie grafů to znamená, že v daném obrazci (grafu) máme najít eulerovský tah. Eulerovský tah může být otevřený nebo uzavřený. Uzavřený eulerovský tah nastává v případě, že všechny uzly grafu mají sudý stupeň a tah končí v témž uzlu, jako začíná. U otevřeného eulerovského tahu mají právě dva uzly lichý stupeň a tah v jednom uzlu s lichým stupněm začíná a ve druhém končí. Díky informacím o uzavřeném a otevřeném eulerovském tahu si již nemusíme pracně namáhat hlavu a snadno ověříme, zda je úloha řešitelná či nikoliv.

Řešení „jednotažky“ většinou hledáme pomocí metody pokus-omyl. Ukážeme si, že pomocí grafů, existuje i cílevědomý postup. Dále popsaný postup můžeme sledovat na obrázku 27. Nejprve máme graf, jehož všechny uzly mají sudý stupeň. Zvolíme si libovolný uzel u_1 a z něho vytvoříme libovolný uzavřený sled. Poté sestrojíme uzavřený sled z uzlu u_2 a následně i z uzlu u_3. Z těchto jednotlivých uzavřených sledů snadno sestrojíme uzavřený eulerovský tah, který začíná i končí v uzlu u_1. V případě grafu se dvěma uzly lichého stupně postupujeme tak, že uzly u_1 a u_2 lichého stupně spojíme pomocnou hranou a dostaneme graf se všemi uzly stupně sudého. První uzavřený sled začneme v uzlu u_1 a pomocnou hranou. Dále pak postupujeme stejně jako v předchozím případě. Ve chvíli, kdy vytvoříme uzavřený eulerovský tah, odebereme pomocnou hranu a získáváme eulerovský tah otevřený, který začíná v uzlu u_1 a končí v uzlu u_2.



Obr. 27: Postupné řešení „jednotažky“

Úlohy o „jednotažkách“ nepatří pouze do rekreační matematiky, ale mají i praktický význam.
Např.: Kropicí vůz projíždí ulicemi města, pokud možno s co nejnižšími náklady. Bylo by dobré, aby každou ulicí projel jen jednou. Pokud si mapku s ulicemi překreslíme jako graf, řešení dané situace se změní v hledání uzavřeného eulerovského tahu.
Podobná situace by mohla nastat při hledání co nejkratší cesty pro popelářský vůz apod.

Nyní se můžeme vrátit k úloze o sedmi mostech v Königsbergu zmíněné v kapitole o historii grafů. Když si obrázek s polohou řeky, ostrovů a mostů znázorníme jako graf, vidíme z něj, že všechny čtyři uzly mají lichý stupeň. Podle zadání úlohy máme vyjít ze stejného místa, do kterého se máme vrátit, tzn., že máme sestrojit uzavřený eulerovský tah. To ovšem nedokážeme, protože máme všechny uzly lichého stupně, nikoliv sudého. Úloha o sedmi mostech v Königsbergu tedy nemá řešení.

4.8.2 Úloha čínského pošťáka

Úkolem pošťáka je roznést poštu do všech ulic města a vrátit se zpět do místa, odkud vyšel. Zároveň je jeho snahou ujít co nejméně kilometrů. Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Demel, 2002).

Matematicky řečeno, máme dán souvislý neorientovaný graf s kladně ohodnocenými hranami a hledáme nejkratší uzavřený sled procházející všemi hranami grafu.

Možností řešení této úlohy je více. Pokud v zadaném grafu nalezneme eulerovský tah, našli jsme optimální řešení. V případě, že v grafu eulerovský tah není, řešení úlohy je poněkud komplikovanější. Sled, který prochází všemi hranami grafu, nutně musí některými hranami procházet minimálně dvakrát. Není komplikované dokázat, že nejkratší takovýto sled musí některými hranami procházet jednou nebo dvakrát, ne vícekrát (viz Demel, 2002, s. 184, resp. s. 248). Hledáme tedy sled, ve kterém je součet hodnot hran projitých dvakrát co nejmenší.

Nejprve ze zadaného grafu vybereme všechny uzly lichého stupně. Poté nalezneme nejkratší cesty mezi všemi uzly lichého stupně a určíme jejich délky. Na množině uzlů lichého stupně vytvoříme úplný graf s ohodnocenými hranami. Hodnoty hran odpovídají nejkratším délkám cest. Dále ve vzniklém úplném grafu najdeme nejlevnější perfektní párování. Hrany, které jsou v párování, přidáme ještě jednou do původního grafu a vznikne nový graf. Tyto zdvojené hrany představují místa, kde se v původním grafu projde hranou dvakrát. V novém grafu mají v tomto okamžiku všechny uzly sudý stupeň, a proto v něm můžeme bez problému najít eulerovský tah. Tím jsme v původním grafu dostali nejkratší sled procházející všechny hrany grafu.

4.8.3 Poloha ozubeného kolečka

Další aplikací eulerovských tahů je hledání polohy ozubeného kolečka, resp. tak zvané de Bruijnovy posloupnosti. Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Demel, 2002).

„Máme dáno kladné číslo *k*. Úkolem je najít co nejdelší cyklickou posloupnost nul a jedniček takovou, že žádné dvě *k*-tice po sobě jdoucích cifer nejsou stejné. Taková posloupnost se nazývá de Bruijnova posloupnost.“ (Demel, 2002, s. 178)

Obvod ozubeného kolečka označíme nulami a jedničkami takovým způsobem, abychom mohli určit přesnou polohu kolečka pouze tím, že zjistíme *k* po sobě následujících cifer.

„Počet posloupností tvořených k nulami a jedničkami je 2^k. Proto délka hledané de Bruijnovy posloupnosti nemůže být větší než 2^k. Pomocí eulerovských tahů dokážeme, že posloupnost o délce 2^k existuje, a získáme návod, jak ji sestrojit.

Vezměme graf, který má 2^{k-1} vrcholů. Vrcholy označíme všemi $(k-1)$-ticemi nul a jedniček. Graf bude mít 2^k hran označených všemi k-ticemi nul a jedniček, a to tak, že hrana označená $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ povede z vrcholu $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ do vrcholu $(x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$. To znamená, že z každého vrcholu vychází přesně dvě hrany; jejich označení se liší pouze na posledním k-tém místě, jedna hrana tam má jedničku a druhá nulu. Podobně do každého vrcholu vchází dvě hrany, jejichž označení se liší v první číslici.“ (Demel, 2002, s. 178, 179)

„Libovolný sled v takovémto grafu můžeme snadno zakódovat pomocí posloupnosti nul a jedniček: každá číslice vyjadřuje jednu ze dvou možností jak pokračovat z daného vrcholu, který je označen předcházející $(k-1)$-ticí.“ (Demel, 2002, 179)

Místo hledání de Bruijnovy posloupnosti jsme se dostali k hledání uzavřeného orientovaného eulerovského tahu ve výše specifikovaném grafu. Ten je souvislý a pro každý jeho uzel platí, že počet hran vstupujících do uzlu je shodný s počtem hran vystupujících z uzlu. O takovémto grafu víme, že v něm existuje eulerovský tah. Je patrné, že i více než jeden, a tedy i více de Bruijnových posloupností.

4.9 Problém obchodního cestujícího

Problém obchodního cestujícího je tzv. hamiltonovská úloha. To znamená, že ji řešíme pomocí hledání některého z hamiltonovských objektů (cesta, kružnice, cyklus). Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Demel, 2002).

Hamiltonovské úlohy

Hamiltonovské úlohy rozdělujeme do skupin podle několika kritérií.

- Existenční úlohy a optimalizační úlohy. U existenčních úloh se zajímáme o to, zda vůbec hamiltonovská cesta, kružnice nebo cyklus v daném grafu existuje. Pokud existuje, snažíme se o její nalezení. U optimalizačních úloh hledáme optimální (většinou pokud možno nejkratší) hamiltonovskou cestu, kružnici nebo cyklus.
- Orientované úlohy a neorientované úlohy. U orientovaných nebo neorientovaných úloh hledáme orientovanou nebo neorientovanou hamiltonovskou cestu, kružnici či cyklus.
- Úlohy se zadaným či nezadaným počátečním nebo koncovým uzlem. U úloh se zadaným či nezadaným počátečním nebo koncovým uzlem hledáme hamiltonovskou cestu, kde záleží na tom, zda je v úloze zadáno, ve kterém uzlu má hamiltonovská cesta začínat a ve kterém má končit.

Asi nejznámější úlohou z této oblasti je Problém obchodního cestujícího. Jedná se o úlohu, kdy v úplném neorientovaném grafu s ohodnocenými hranami hledáme nejkratší hamiltonovskou kružnici. Ve skutečnosti jde o to, že obchodní cestující má postupně projít určitý počet měst, jejichž pořadí není důležité, a vrátit se zpět. Podstatná je ale délka jeho trasy, která má být co nejkratší.

S úlohou o obchodním cestujícím se v reálném životě poměrně často setkáváme. Může to být například při rozvozu či donášce pošty, kdy doručovatelé plánují co nejkratší cestu (viz podkapitola 4.8.2 – Úloha čínského pošťáka. Stejně tak závoz větších či menších obchodů dodavateli apod. Takových situací bychom našli celou řadu.

4.10 Přelévání vody

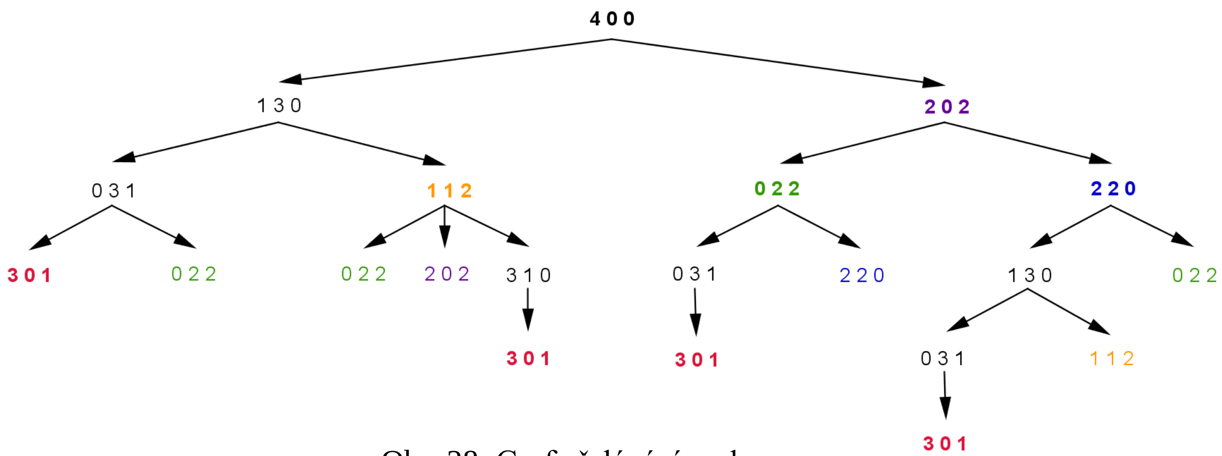
Úlohy o přelévání vody jsou známé stovky let. V nejrůznějších obměnách se vyskytují v matematických učebnicích, více i méně odborných knihách, časopisech apod. Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Opava, 1989).

Máme tři nádoby o objemu 4 litry, 3 litry a 2 litry. Ve čtyřlitrové nádobě jsou 4 litry vody, zbývající dvě nádoby jsou prázdné. Žádnou jinou odměrku nemáme a potřebujeme mít ve čtyřlitrové nádobě 3 litry vody a ve dvoulitrové nádobě 1 litr vody. Nalezněme řešení s tím, že smíme přelívat vodu jen mezi těmito třemi nádobami a žádnou vodu nesmíme vylít pryč.

V tomto případě se nejedná o složitou úlohu. Řešení snadno nalezneme jednoduchou úvahou: Ze čtyřlitrové nádoby přelijeme vodu do třílitrové nádoby. Zbylý litr vody ze čtyřlitrové nádoby přelijeme do dvoulitrové nádoby. Potom už jen 3 litry vody z nádoby třílitrové přelijeme do nádoby čtyřlitrové a máme hledané řešení.

Nyní ukážeme hledání řešení úlohy pomocí grafu:

Pozn. Číselné symboly znázorňují, kolik je ve které nádobě vody. Nádoby jsou v pořadí čtyřlitrová, třílitrová a dvoulitrová.



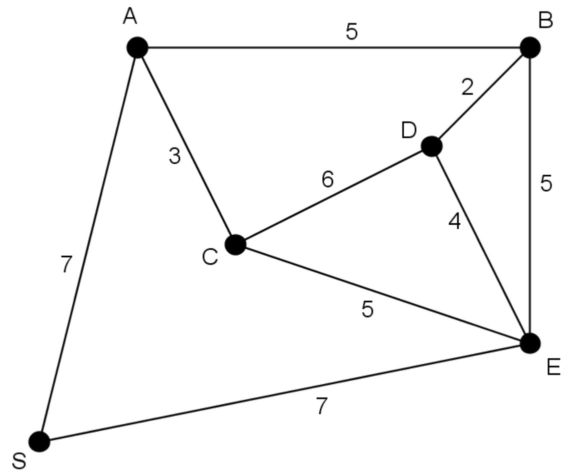
Obr. 28: Graf přelévání vody

Do grafu vždy zaneseme všechny možnosti přelití vody (vynechala jsem možnosti, kdy bychom se vrátili o úroveň výše). Názorně zde vidíme hledané řešení a zároveň i různé cesty, kterými se k výsledku dostat. Bez pochyby nejkratší (na 3 přelití) je ta, kterou jsem uvedla výše v řešení úvahou.

4.11 Dopravní problémy

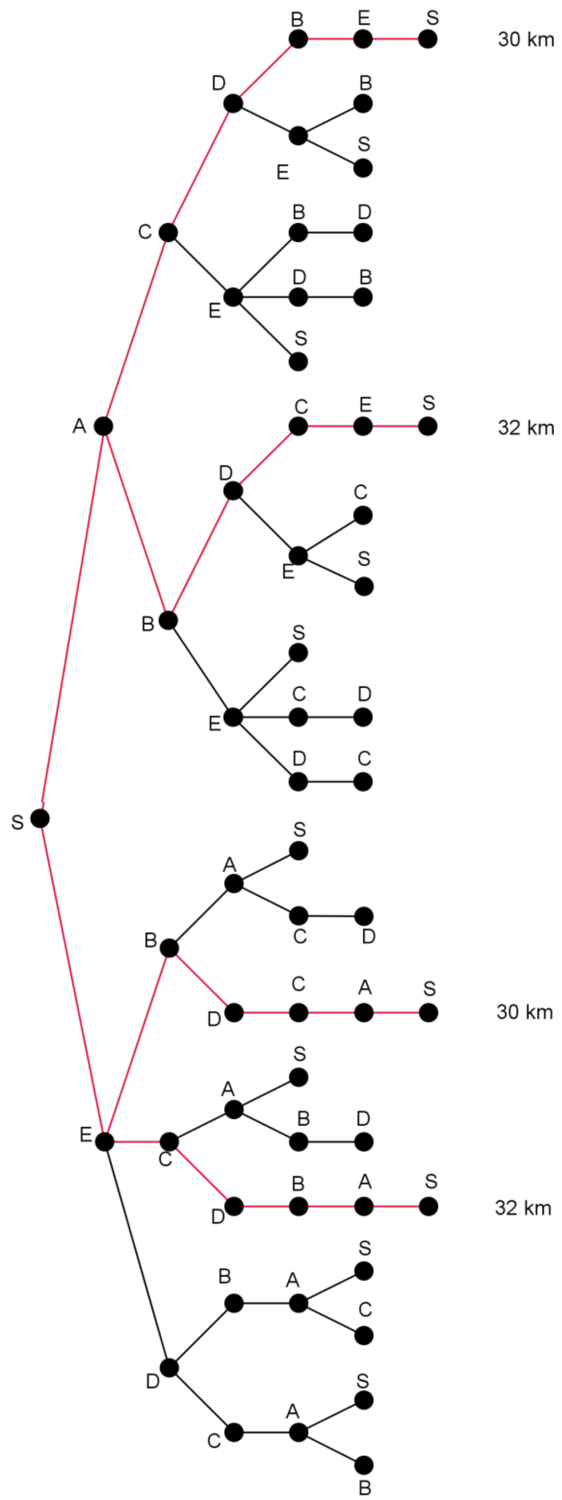
Pod dopravními problémy jsou uschované úlohy rozvozové. Je třeba se zde rozhodnout, kudy a jak rozvézt náklad ze skladu do prodejen, aby cesta byla co nejlevnější. Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Opava, 1989).

Na obrázku číslo 29 máme znázorněný sklad (S) a pět prodejen (A, B, C, D, E). Vzdálenost mezi těmito objekty je udána v kilometrech. Sklad má k dispozici na rozvoz pouze jediné auto a vzhledem k množství rozvážených produktů postačí jeden závoz. Máme najít co nejvýhodnější cestu, aby auto najelo co nejméně kilometrů.



Obr. 29: Znázornění dopravního problému

Je zřejmé, že možností kudy jet je několik. Ale která cesta je skutečně nejkratší? Jednou z možností, jak ji nalézt, je využití hamiltonovské kružnice. Tu dostaneme pomocí tzv. *rozhodovacího grafu*. Podle obrázku 29 si postupně znázorníme všechny možné trasy. Ze skladu S můžeme vyjet do prodejen A a E. Z A můžeme jet do B nebo C. Vybereme-li si prodejnu B, můžeme pokračovat do D nebo E, do A nikoliv, protože tam jsme už byli. Pokud takto systematicky projdeme všechny možnosti, jak objet jednotlivé prodejny a vrátit se zpět do skladu, můžeme je zaznamenat rozhodovacího grafu, který vidíme na obrázku 30. Z něj je zřejmé, že hledané hamiltonovské kružnice existují čtyři (červeně vyznačené). Chceme-li nejkratší, resp. nejlevnější cestu, řešením jsou dvě kružnice v délce 30 km, které se od sebe liší pouze pořadím prodejen.

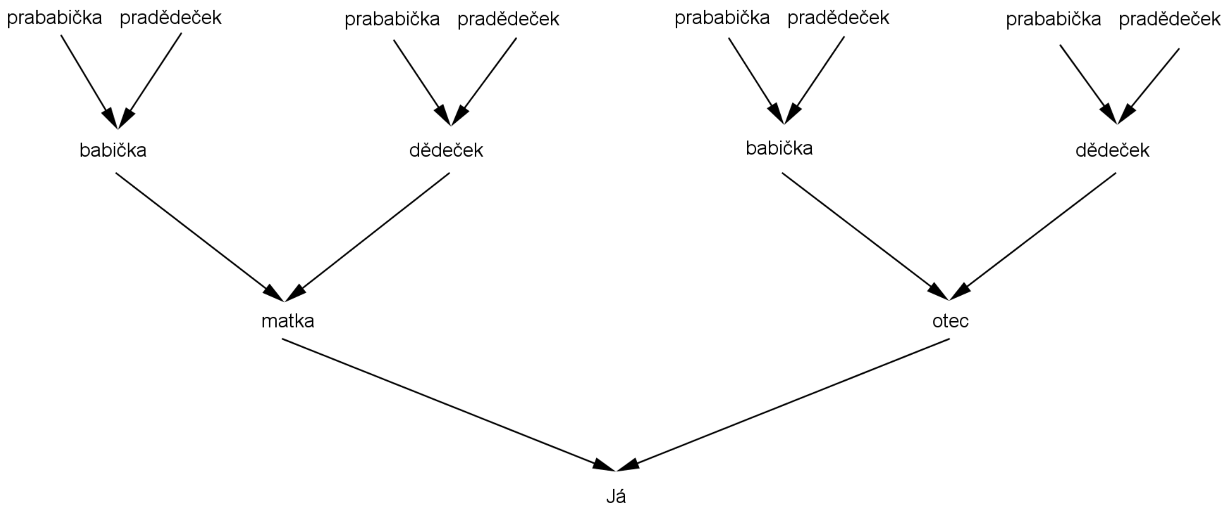


Obr. 30: Rozhodovací graf dané dopravní situace

4.12 Rodokmen

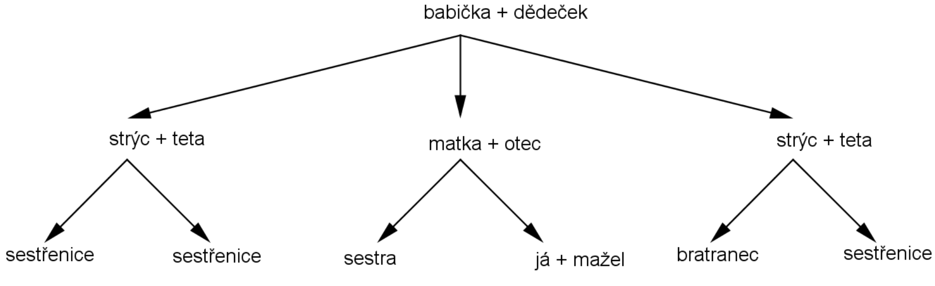
Další zajímavou aplikací teorie grafů je rodokmen. Je to příklad aplikace, kdy si člověk ani neuvědomí, že nějaký matematický aparát používá. Tím aparátem je graf, který se nazývá kořenový strom.

Při tvorbě rodokmenu můžeme vybírat v podstatě ze dvou možností. U první možnosti vycházíme od nejmladšího člena a pátráme po předcích. Graf, který znázorňuje takovýto rodokmen, má poměrně velké množství kořenů (viz obrázek 31). Záleží na tom, jak daleko do minulosti chceme zajít.



Obr. 31: Rodokmen s více kořeny

Druhý typ rodokmenu začíná u nějakého staršího člena, který vytváří přehled svých potomků. V tomto případě má graf pouze jeden kořen (viz obrázek 32).



Obr. 32: Rodokmen s jedním kořenem

4.13 Aplikace párování

Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Demel, 2002).

Příklad

V ovocném sadu se nachází, sudý počet stromků a jedna hromada hnoje. Úkolem je rozvézt hnůj ke stromkům následujícím způsobem: ke každému stromku je třeba dovézt půl kolečka hnoje a zároveň šetřit silami i časem. To znamená, že v rámci úspory času přivezeme vždy k jednomu stromku plné kolečko, polovinu vyložíme a zbylou polovinu kolečka dovezeme ke druhému stromku. Při šetření sil požadujeme, aby konečný součet vzdáleností naježděných s plným kolečkem byl co nejmenší.

Řešení

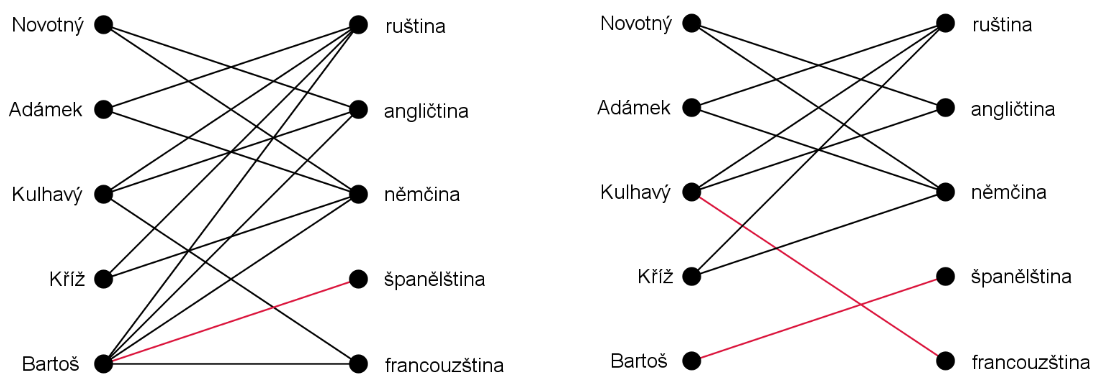
Pod řešením úlohy si představíme hledání nejlevnějšího perfektního párování v úplném grafu se sudým počtem uzlů. Jednotlivé stromky si představíme jako uzly grafu. Cena hrany je součet sil vynaložených na jízdu s plným kolečkem k bližšímu ze dvou stromků, sil vynaložených na jízdu s poloprázdným kolečkem ke druhému stromku a sil potřebných k návratu s prázdným kolečkem k hromadě hnoje. Je jasné, že ke každému stromku se jede s hnojem právě jednou, a proto hrany představující tyto cesty musí tvořit perfektní párování.

4.14 Výběr uchazečů na místa překladatelů

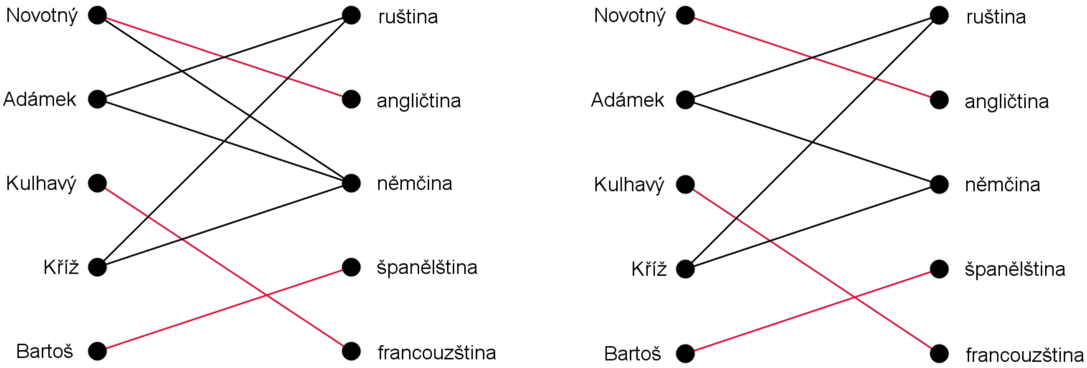
Zdrojem informací této podkapitoly je kniha (Opava, 1989)

V knihovně byl vypsán konkurz na místa pěti překladatelů z následujících jazyků: ruština, španělština, němčina, angličtina a francouzština. Přihlásilo se pět překladatelů, kteří byli v požadovaných jazycích zdatní. Pan Novotný – angličtina a němčina, pan Adámek – ruština a němčina, pan Kulhavý – ruština, angličtina a francouzština, pan Kříž – ruština a němčina a pan Bartoš – španělština, francouzština, angličtina, němčina a ruština. Kdyby knihovna těchto pět uchazečů přijala, obsadila by se volná místa tak, aby každý překladatel překládal pouze z jednoho jazyka? Pokud ano, na koho vyjde jaký jazyk?

Zadané podmínky znázorníme do grafu (viz obrázek 33). Z něj je na první pohled zřejmé, že španělštinu může překládat jedině pan Bartoš. Proto mu ostatní hrany z grafu smažeme. V tu chvíli vidíme, že francouzštinu musí překládat pan Kulhavý. I jemu smažeme zbývající hrany a zjistíme, že angličtina je přisouzena panu Novotnému. Po odmazání zbývající hrany pana Novotného zbývají dvě možnosti: němčinu bude překládat pan Adámek a ruštinu pan Kříž nebo naopak.



Obr. 33a: Výběr uchazečů

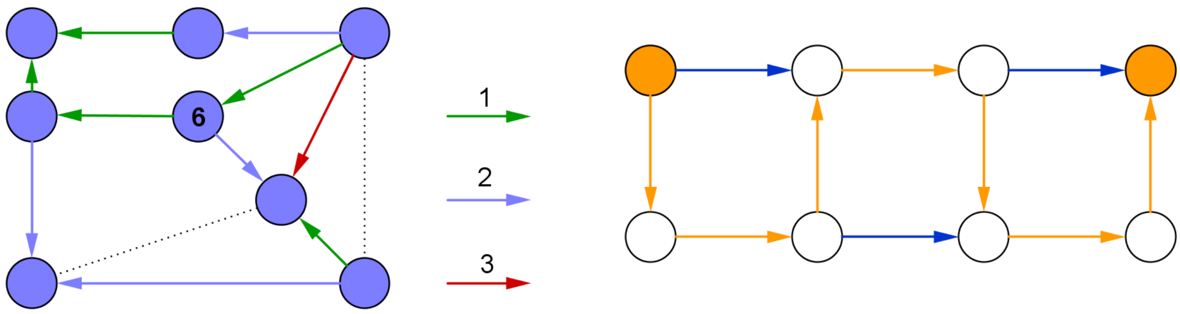


Obr. 33b: Výběr uchazečů

4.15 Setkání s grafy na 1. stupni základní školy

V dnešní době se s grafy setkávají žáci už v první třídě základní školy, i když si to vůbec neuvědomují. V učebnicích matematiky od nakladatelství Fraus, jejímž autorem je Milan Hejný, se objevuje několik prostředí, ve kterém bychom mohli najít schované grafy. Zdrojem informací této podkapitoly jsou knihy (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, 2007), (Hejný, Jirotková, Slezáková-Kratochvílová, Michnová, 2009) a (Hejný, Jirotková, Bomerová, 2010).

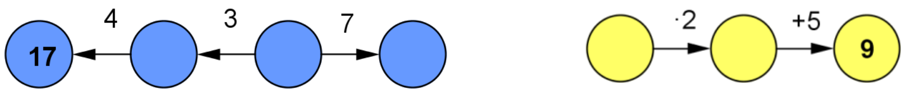
Prvním z nich jsou tak zvané **pavučiny**.



Obr. 34: Pavučiny (vlevo pro žáky 1. ročníku, vpravo pro žáky 4. ročníku)

Jsou zde v podstatě ohodnocené uzly a ohodnocené orientované hrany. Princip práce s pavučinami je takový, že pokud hodnotu hrany přičteme k hodnotě počátečního uzlu, musíme dostat hodnotu uzlu koncového. Pomocí těchto výpočtů je třeba dohledat všechna ohodnocení hran a uzlů, která nejsou zadaná. Na obrázku 34 vlevo je úplně první pavučina, se kterou se žáci v prvním ročníku setkávají. Je jednoduchá, ale pro děti je to v tu chvíli nové a zajímavé prostředí na procvičování sčítání, případně odčítání. V pravé části obrázku 34 vidíme jednu z pavučin, se kterými se zabývají žáci ve čtvrtém ročníku. U této pavučiny děti pouze vědí, že součet čísel ve žlutých kroužcích je 25 a že žádné číslo není větší než 20. Jejich úkolem je dohledat všechna čísla patřící do bílých kroužků a hodnoty žlutých a modrých šipek.

Dalším prostředím jsou **hadi**.



Obr. 35: Hadi

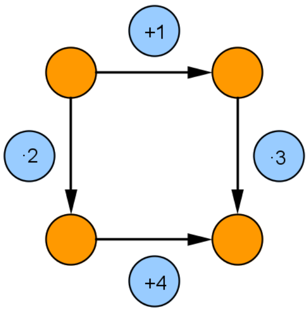
Hadi jsou velmi podobní pavučinám, ale uzly a hrany leží, mohli bychom říci, na jedné přímce. Opět zde hodnotu hrany přičteme k hodnotě počátečního uzlu a musíme dostat hodnotu uzlu koncového. Ale ne vždy. Na obrázku 34 vpravo si můžeme všimnout, že se zde může objevit násobení. Znamená to, že poté, co hodnotu počátečního uzlu vynásobíme daným číslem, dostaneme hodnotu koncového uzlu.

Na obrázku 35 vlevo je příklad hada pro žáky prvního ročníku. Kromě správného počítání musí žáci pečlivě sledovat, odkud a kam šipka směřuje, aby provedli správnou operaci. Nejedná se totiž pouze o automatické přičítání hodnot zleva doprava. Pokud šipka ukazuje směrem doprava, tak hodnotu, která k ní náleží, přičítáme, pokud směřuje doleva, tak odečítáme.

Ve čtvrtém ročníku se žáci seznamují s rovnicemi a jejich různými možnostmi zápisu a řešení. Jednou z nich je had, kterého vidíme na obrázku 35 vpravo. V tomto hadovi je v podstatě „schovaná“ rovnice $2x + 5 = 9$. Ne všechny děti jsou schopny ve věku, kdy navštěvují 1. stupeň základní školy, vstřebat klasickou práci s rovnicemi a toto grafické znázornění jim v pochopení učiva velmi pomáhá.

Had na obrázku 35 vpravo může být též grafickým znázorněním úlohy typu „Myslím si číslo“. Zde konkrétně: Myslím si číslo, vynásobím ho dvěma, potom přičtu pět a dostanu výsledek devět. Jaké číslo si myslím?

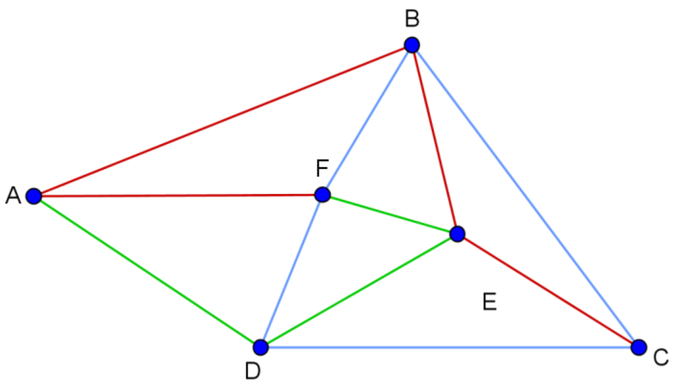
Třetím prostředím jsou **šipkové grafy**.



Obr. 36: Šipkový graf

Šipkové grafy jsou velmi podobné pavučinám, ale podobně jako u hadů se zde nevyskytuje pouze operace sčítání, resp. odčítání, ale také násobení. Orientované hrany u šipkových grafů nejsou barevné jako u pavučin, ale mají všechny stejnou barvu a „nesou" s sebou informaci, jaká operace se má při jejich absolvování provést. Na obrázku 36 je šipkový graf, který řeší žáci čtvrtého ročníku. Jejich úkolem je najít hodnoty všech oranžových koleček.

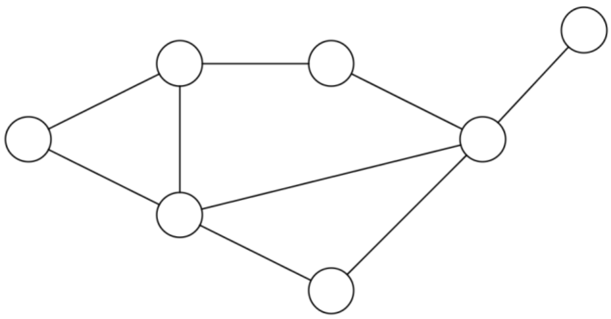
Poslední prostředí, kde se žáci 1. stupně základní školy setkávají s grafy, jsou tzv. **cyklotrasy a trasy autobusových linek.**



Obr. 37: Schéma cyklotrasy

Cyklotrasy jsou grafická schémata reálných míst, která projíždíme na kole. Spojitost s teorií grafů je zde velmi patrná, přesvědčuje nás o tom obrázek 37. Uzly jsou jednotlivá stanoviště, kterými cyklista projíždí (na obrázku označená A – F), a hrany jsou stezky, po kterých cyklista jede.

Děti se s prvními cyklotrasami setkávají již ve 2. třídě. Obrázky tras mají patřičně barevné a pohádkově laděné. Toto prostředí slouží dětem k porozumění vztahu mezi reálnou jízdou po stezkách a trasou znázorněnou na mapce. Úkolem je zde hledat a kombinovat nejrůznější možnosti, jak se dostat z jednoho místa do druhého. Důležitá podmínka je, že každou stezku mezi dvěma určitými stanovišti můžeme projet pouze jednou.



Obr. 38: Schéma trasy autobusové linky

Cvičení typu trasy autobusových linek jsou stejně jako cyklotrasy jistými schématy reálné situace, konkrétně trasy, po kterých jezdí linkové autobusy. Z obrázku 38 je zřejmé, že uzly grafu zde představují zastávky v jednotlivých obcích (kolečka) a hrany jsou silnice mezi obcemi.

Na rozdíl od cyklotras zde žáci nevymýšlejí trasy sami, ale dle zadání se snaží najít, kudy příslušná autobusová linka jede. Zadání úlohy k obrázku 38 je následující:

„Mezi obcemi jezdí dvě autobusové linky: modrá okružní D-B-G-C-A-F-D a červená kyvadlová C-F-B-H. Do mapky doplň názvy obcí.“ (Hejný a kol., 2009, s. 53)

Děti do obrázku zapisují pomocí písmen ze zadání jednotlivé názvy obcí a barevně vyznačují příslušnou autobusovou linku.

5 Závěr

Hlavním úkolem bakalářské práce bylo shrnout nejrůznější aplikace teorie grafů. Tento cíl je v práci splněn. Grafy ve smyslu teorie grafů používáme velmi často a velmi často si to ani neuvědomujeme. Při řešení či zpracovávání nějaké situace si zakreslíme několik bodů, spojíme je čarami a nemáme ani tušení, že jsme použili matematický aparát.

Grafy využíváme v matematice, což se zdá být naprosto samozřejmé, v českém jazyce, při znázorňování dopravních situací, v rekreační matematice, schované jsou v chemii, kartografii a dalších vědních oborech. Též v reálném životě, jak už jsem zmínila, velmi často využíváme grafy. Například rodokmen, pro řadu lidí je to pouhý obrázek, ale i zde je schovaný graf. Dokonce i děti na prvním stupni základní školy se setkávají s grafy ve svých učebnicích matematiky.

Teorie grafů je velmi zajímavá oblast matematiky a já věřím, že ji všichni budeme i nadále využívat alespoň tak jako doposud. Protože grafické znázornění je, dle mého názoru, přeci to nejpřehlednější.

Seznam literatury

(1) Demel, J.: Grafy a jejich aplikace, Academia, Praha, 2002.

(2) Hartmannová, V.: Jazykové rozbory, Olomouc, Olomouc, 2002.

(3) Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková-Kratochvílová, J.: Matematika 1 (2. díl) – učebnice pro základní školy, Fraus, Plzeň, 2007.

(4) Hejný, M., Jirotková, D., Slezáková-Kratochvílová, J., Michnová, J.: Matematika 3 – učebnice pro základní školy, Fraus, Plzeň, 2009.

(5) Hejný, M., Jirotková, D., Bomerová, E.: Matematika 4 – učebnice pro základní školy, Fraus, Plzeň, 2010.

(6) Matoušek, J., Nešetřil, J.: Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum, Praha, 2009.

(7) Novotná, J., Trch, M.: Algebra a teoretická matematika. Sbírka příkladů. 3. část – Základy algebry. Skriptum PedF UK, SPN, Praha, 1993.

(8) Opava, Z.: Matematika kolem nás, Albatros, Praha, 1989.

(9) Sedláček, J.: Úvod do teorie grafů, Academia, Praha, 1981.

(10) Šišma, P.: Teorie grafů 1736 – 1963, Prometheus, Praha, 1997.

(11) Fiedler, M.: RNDr. Jiří Sedláček, CSc. šedesátníkem. Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 109 (1984), No. 2, 220–224, Institute of Mathematics AS CR, 1984 [online]. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/108500/CasPestMat_109-1984-2_11.pdf [cit. 2016-03-12].

(12) In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Dénes König: Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2015-11-17].

(13) In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Edsger Wybe Dijkstra: Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2015-11-17].

(14) In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Frank Harary: Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-21].

(15) In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Gabriel Andrew Dirac: Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-21].

(16) In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Gerhard Ringel: Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-21].

(17) In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Mapka sedmi mostů v Königsbergu: Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-13].

(18) In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Paul Erdös: Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2016-02-21].

(19) In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Robert Clay Prim: Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2015-11-17].

(20) In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Slepá mapa Evropy: Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2015-09-12].

(21) Oystein Ore [online]. [cit. 2016-04-12]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Ore.html [cit. 2016-02-21].

(22) Rosický, J.: Zemřel docent Milan Sekanina. Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 113 (1988), No. 3, 321–327, Institute of Mathematics AS CR, 1988 [online]. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/108779/CasPestMat_113-1988-3_12.pdf [cit. 2016-03-13].

(23) Ahrens, W.: Über das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung. Mathematische Annalen, 49, 1897, s. 311–324. FM 28, s. 770.

(24) Berge, C.: Théorie des Graphes et ses Applications. Dunod, Paris, 1. vyd., 1958. Ruský překlad Moskva, Izdatělstvo Inostrannoj Litěratury 1962.

(25) Borůvka, O.: O jistém problému minimálním. Práce Moravské Přírodovědecké společnosti, 3, 1926, č. 3, s. 37–58.

(26) Euler, L.: Solutioproblematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 8, 1736, s. 128–140. Opera Omnia, series prima, opera mathematica. Sub auspiciis societatis scientiarum naturalium Helveticae, 1911–56, Vol. 7, s. 1–10. Překlady: Coupy 1851 (fran.), Speiser 1925 (něm.).

(27) Heawood, P. J.: Map–colour theorem. Quaterly Jurnal of Pure and Applied Mathematics, 24, 1890, s. 332–338. FM 22, s. 562–563.

(28) Kempe, A. B.: On the geographical problem of the four colours. American Journal of Mathematics, 2, 1879, s. 193–200.

(29) König, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Mit einer Abhandlung von L. Euler. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1. vyd., 1986.

(30) Sedláček, J.: Kombinatorika v teorii a praxi (Úvod do teorie grafů). Nakladatelství ČSAV, Praha, 1964. Druhé vydání 1977.

(31) Veblen, O.: Analysis situs, díl 2. The Cambridge Colloquium 1916, New York, 1. vydání, 1922. 2. vydání 1931.